

УДК: 532.517.4:532.525.2

Моделирование байпасного ламинарно-турбулентного перехода в рамках k - ε подхода

С. В. Жлуктов^а, А. А. Аксёнов, П. И. Карасёв

Общество с ограниченной ответственностью (ООО) ТЕСИС,
Россия, 127083, г. Москва, ул. Юннатов, д. 18, офис 705

E-mail: ^аsz@tesis.com.ru

Получено 28 июля 2014 г.
после доработки 27 октября 2014 г.

Данная работа посвящена изучению возможности предсказать байпасный ламинарно-турбулентный переход с помощью несложной низкорейнольдсовой k - ε модели турбулентности. Такая модель была разработана в ООО «ТЕСИС». Модель реализована в программном комплексе FlowVision. В статье обсуждаются идеи, воплощенные в этой модели. Возможность модели предсказывать ламинарно-турбулентный переход демонстрируется на известных тестовых задачах ТЗВ, ТЗА, ТЗА-.

Ключевые слова: турбулентное течение, байпасный ламинарно-турбулентный переход, низкорейнольдсовая k - ε модель турбулентности, сеточная сходимость

Modeling bypass transition within k - ε approach

S. V. Zhluktov, A. A. Aksenov, P. I. Karasev

TESIS Ltd., off. 705, 18 Unnatov str., Moscow, 127083, Russia

Abstract. — This article is dedicated to investigation of the possibility to predict bypass transition by means of an unsophisticated low-Reynolds k - ε turbulence model. Such a model has been developed at TESIS Ltd. The model is implemented in the FlowVision software suit. The ideas implemented in the model are discussed in the article. The capability of the model to predict bypass transition is demonstrated on well-known test cases T3B, T3A, T3A-.

Keywords: turbulent flow, bypass transition, low-Reynolds k - ε turbulence model, grid convergence

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 6, pp. 879–888 (Russian).

Введение

Ламинарно-турбулентный (ЛТ) переход — сложное физическое явление, определяемое как смена ламинарного (устойчивого) режима течения жидкости или газа на турбулентный (неустойчивый, пульсирующий). ЛТ переход наблюдается на крыльях и фюзеляже самолета, на лопатках компрессора и турбины, на корпусе судна. Положение перехода оказывает существенное влияние на силу сопротивления рассматриваемого объекта, на гидравлические потери и на теплообмен в проектируемом устройстве. ЛТ переход сопровождается изменением многих характеристик течения. Главный эффект ЛТ перехода — увеличение эффективных коэффициентов переноса вследствие усиленного перемешивания жидкости или газа. В литературе различают естественный переход — ЛТ переход, обусловленный развитием неустойчивости потока, байпасный переход — ЛТ переход, обусловленный проникновением нестационарных возмущений из внешнего потока в пограничный слой, и ЛТ переход, индуцированный отрывом ламинарного потока [Maule, 1991], [Di Pasquale, Ronay, Garrett, 2009]. Методы моделирования естественного ЛТ перехода (развития неустойчивости) можно найти, например, в книге [Жигулёв, Тумин, 1987]. В книге [McComb, 1992] обсуждаются переходные турбулентные структуры (turbulent spots), характерные для естественного ЛТ перехода. В статье [Бойко, Нечепуренко, 2010] дается математическая постановка задачи временной устойчивости течений в оребренных каналах и предлагаются новые алгоритмы, позволяющие эффективно вычислять различные характеристики устойчивости течения. В работе [Cutrone, De Palma et al., 2007] анализируются возможности шести моделей турбулентности предсказывать байпасный ЛТ переход. В диссертации [Babajee, 2014] исследуется ЛТ переход, индуцированный отрывом потока в турбине низкого давления.

В настоящей работе представлена новая низкорейнольдсовая k - ε модель турбулентности «FV», позволяющая предсказывать байпасный ЛТ переход в пограничном слое на твердой поверхности. Предполагается, что поток жидкости или газа, набегающий на твердое тело, турбулентный. Около передней кромки тела поток тормозится и, как следствие, ламинаризуется. При этом внешний поток остается турбулентным. По мере движения жидкости вдоль тела происходит диффузия пульсаций из внешнего потока в пограничный слой, в результате чего на определенном расстоянии от передней кромки развивается полностью турбулентный пограничный слой. Разработанная модель реализована в программном комплексе (ПК) FlowVision. Она содержит несколько демпфирующих функций в уравнениях для k и ε . Общее число модельных констант — 11. Все они выведены в интерфейс ПК FlowVision. Таким образом, пользователь может настраивать модель на тот или иной тип течения. В данной статье возможности модели демонстрируются на известных тестовых задачах ТЗВ, ТЗА и ТЗА- [Savill, 1992]. В этих экспериментах исследовалось обтекание пластины при малых значениях градиента давления.

1. Модель турбулентности KEFV

В данном разделе представлены уравнения, алгебраические выражения и константы, составляющие k - ε модель турбулентности «FV» (KEFV). В следующем разделе обсуждаются идеи некоторых k - ε моделей турбулентности, использованные при конструировании модели KEFV.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}k) = \nabla \left(\left(\mu + f_t \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + \rho P_k - \rho \varepsilon - D_{pp}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}\varepsilon) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\text{Re}_t}}} \frac{\varepsilon}{k} \rho (C_{\varepsilon 1} f_1 P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon), \quad (1.2)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (1.3)$$

$$P_k = \nu_t \left(S - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) k, \quad (1.4)$$

$$D_{pp} = C_{pp} \rho \{ \nabla \delta \cdot \nabla (k |\mathbf{V}|) \}, \quad (1.5)$$

$$S = 2 \sum_{i,j} S_{ij} S_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right),$$

$$f_t = 1 + C_1 \exp \left\{ - \left(\frac{Re_t}{C_2} \right)^2 \right\}, \quad (1.6)$$

$$f_1 = 1 - C_{\varepsilon 3} + C_{\varepsilon 3} \frac{P_k}{\varepsilon}, \quad (1.7)$$

$$f_2 = \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{y_{Kolm}^+}{C_4} \right) \right\}^2 \left[1 - C_3 \exp \left\{ - \left(\frac{Re_t}{C_5} \right)^2 \right\} \right],$$

$$y_{Kolm}^+ = \frac{(\nu \cdot \varepsilon)^{1/4} y}{\nu}, \quad Re_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon},$$

$$\sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3,$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_{\varepsilon 3} = 0.05, \quad C_{pp} = 0.03, \quad (1.8)$$

$$C_1 = 5, \quad C_2 = 50, \quad C_3 = 0.335, \quad C_4 = 3.4, \quad C_5 = 5.8.$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты, t — время, ρ — плотность, \mathbf{V} — скорость, P — статическое давление, k — турбулентная энергия, ε — скорость диссипации турбулентной энергии, ν — кинематический коэффициент вязкости, y — расстояние до стенки, $C_\mu = 0.09$ — фиксированная модельная константа, δ — расстояние до стенки.

2. Преемственность идей

Идея моделировать диффузию турбулентной энергии, обусловленную пульсациями давления, дополнительным источником членом в уравнении для k была предложена в работе [Platov, Golovnev, 2009]:

$$D_{pp} = \text{const} \cdot \rho \frac{\partial (k V_x)}{\partial y}. \quad (2.1)$$

Здесь V_x — касательная к стенке составляющая скорости, y — нормальная координата. В этой работе рассматривалось двухмерное течение около пластины. В работе [Аксёнов, Жлуктов, Платов, 2013] выражение (2.1) было обобщено на трехмерный случай — см. выражение (1.5). Расчеты показали, что член (1.5) оказывает существенное влияние на положение ламинарно-турбулентного перехода на твердой поверхности.

В работе [Park, Sung, 1995] была предложена демпфирующая функция для турбулентных коэффициентов диффузии в уравнениях для k и ε :

$$f_t = 1 + 3.5 \exp \left\{ - \left(\frac{Re_t}{150} \right)^2 \right\}. \quad (2.2)$$

Численные эксперименты, проводившиеся в процессе разработки модели KEFV, показали, что ламинарно-турбулентный переход лучше моделируется, если демпфер типа (2.2) ввести только в уравнение для k — см. уравнение (1.1). Функция (1.6) позволяет осуществлять «тонкую настройку» модели.

Идея демпфирующей функции f_1 (1.7) также взята из работы [Park, Sung, 1995]. В этой работе

$$f_1 = 0,95 + 0,05 \frac{Pk}{\varepsilon}.$$

В работе [Rahman, Siikonen, 2003] было предложено заменить временной масштаб турбулентности k/ε в уравнении для ε на масштаб

$$T_t = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{2}{Re_t}}.$$

Таким образом, временной масштаб турбулентности лимитируется снизу Колмогоровским масштабом. Расчеты с использованием модели KEFV показали, что введение множителя $1/\sqrt{1+2/Re_t}$ в источник член уравнения для ε позволяет избежать сингулярного решения при $\varepsilon/k \rightarrow \infty$.

Демпфирующая функция f_2 взята из модели AKN [Abe, Kondoh, Nagano, 1994]. В этой модели

$$f_2 = \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{y_{Kolm}^+}{3,1}\right) \right\}^2 \left[1 - 0,3 \exp\left\{-\left(\frac{Re_t}{6,5}\right)^2\right\} \right]. \quad (2.3)$$

В модели KEFV константа 0,3 была заменена на 0,335. Расчеты показали, что эта константа оказывает существенное влияние на положение ламинарно-турбулентного перехода на «безградиентной» пластине. Отметим, что второй множитель выражения (2.3) был ранее получен в работе [Batchelor, Townsend, 1948] как результат анализа экспериментальных данных по «свободной» турбулентности. В низко-рейнольдсовой модели [Chien, 1982] демпфирующая функция f_2 имеет вид:

$$f_2 = 1 - 0,22 \exp\left\{-\left(\frac{Re_t}{6}\right)^2\right\}.$$

Значения констант $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ и $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ взяты из «стандартной» k - ε модели турбулентности (см. [Wilcox, 1994]).

Большинство k - ε моделей турбулентности предполагает демпфирование турбулентной вязкости с помощью специальной функции, традиционно обозначаемой f_μ :

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

В модели KEFV данный демпфер отсутствует (как и в «стандартной» k - ε модели).

3. Реализация модели KEFV в ПК FlowVision

Программный комплекс (ПК) FlowVision предоставляет пользователю возможность рассчитывать различные течения жидкости и газа в сложных трехмерных областях. Численное ин-

тегрирование уравнений в ПК FlowVision основано на методе конечных объемов. Важным преимуществом ПК FlowVision является автоматическая генерация расчетной сетки. Обычно в программных комплексах вычислительной гидродинамики (ВГД) в работе пользователя, связанной с моделированием течений, до 90 процентов времени занимает построение расчетной сетки. В ПК FlowVision эта проблема решена с помощью метода подсеточного разрешения геометрии. Суть этого метода заключается в булевом вычитании из прямоугольной (декартовой) расчетной сетки объема, отсекаемого криволинейной границей расчетной области. При этом ячейки расчетной сетки, через которые проходит граница, превращаются в многогранники произвольной формы. Во всех ячейках уравнения в частных производных аппроксимируются разностной схемой высокого порядка точности. Решение в областях с большими градиентами характеристик течения и геометрическими особенностями границы уточняется посредством локальной динамической адаптации расчетной сетки. При адаптации расчетные ячейки разбиваются на более мелкие.

В ПК FlowVision реализовано 7 моделей турбулентности: алгебраическая модель Смагоринского (см. [Гарбарук, Стрелец, 2012]), модель Спаларта–Аллмареса (см. [Wilcox, 1994] и [Гарбарук, Стрелец, 2012]), модель Shear Stress Transport $k-\omega$ (см. [Menter, Kuntz, Langtry, 2003]) и четыре $k-\varepsilon$ модели — стандартная (см. [Wilcox, 1994]), AKN [Abe, Kondoh, Nagano, 1994], квадратичная [Lien, Chen, Leschziner, 1996] и KEFV. В интерфейс модели KEFV выведены все константы (1.8).

4. Результаты численных расчетов

В ПК FlowVision с использованием модели KEFV были решены 3 тестовые задачи: ТЗВ, ТЗА и ТЗА- [Savill, 1992].

В таблице 1 приведены условия этих задач. Значения интенсивности турбулентности и безразмерной турбулентной вязкости даны для передней кромки пластины. Обсуждаемые течения характеризуются пренебрежимо малым продольным градиентом давления.

Таблица 1

| Тест | Скорость на входе (м с^{-1}) | Интенсивность турбулентности (%) | μ_t / μ | Плотность (кг м^{-3}) | Динамическая вязкость ($\text{кг м}^{-1} \text{с}^{-1}$) |
|------|--|--|---------------|-------------------------------------|--|
| ТЗВ | 9.4 | 6.5 | 100 | 1.2 | $1.8 \cdot 10^{-5}$ |
| ТЗА | 5.4 | 3.3 | 12 | 1.2 | $1.8 \cdot 10^{-5}$ |
| ТЗА- | 19.8 | 0.874 | 8.72 | 1.2 | $1.8 \cdot 10^{-5}$ |

Расчетная область и граничные условия показаны на рисунке 1. Размеры расчетной области: по координате x — 2.2 м, по координате y — 1 м. Длина пластины — 2 м. Граничное условие «выход» предполагает фиксированное значение статического давления на соответствующих поверхностях расчетной области. При задании турбулентности на входе учитывается ее затухание от входного сечения до передней кромки пластины. Предварительные расчеты показали, что внешняя граница по координате y находится достаточно далеко от пластины, чтобы обеспечивать малость продольной составляющей градиента давления.

Расчеты тестовых задач ТЗВ, ТЗА и ТЗА- проводились на различных сетках: варьировались способы сгущения сеток по координатам x и y . При выборе оптимальной структуры сетки для каждого теста исследовалась зависимость результата от продольного размера ячеек. В таблице 2 приведены характеристики сеток, на которых проводились систематические расчеты. Коэффициент разрежения Сеток 1 по координате y (по мере удаления от пластины) — 1.01. В каждом тесте Сетка 2 получается из Сетки 1 путем добавления минимум двух координатных плоскостей, делящих пополам первую и вторую ячейки Сетки 1 в направлении y . Аналогичным

образом получаются Сетка 3 из Сетки 2 и Сетка 4 из Сетки 3. Все сетки обеспечивают адекватное разрешение зоны перехода.

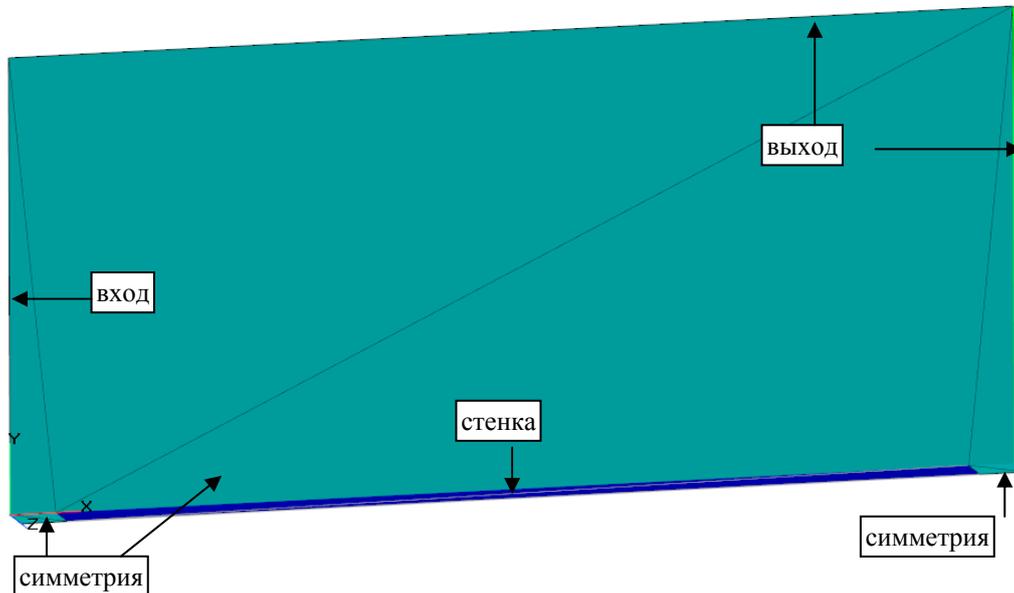


Рис. 1. Расчетная область и граничные условия

Таблица 2

| Тест | Сетка 1 | Сетка 2 | Сетка 3 | Сетка 4 |
|------|---|---|--|---|
| ТЗВ | $N_x \times N_y = 1269 \times 125$ $y^+ \approx 1$ | $N_x \times N_y = 1269 \times 127$ $y^+ \approx 0.5$ | $N_x \times N_y = 1269 \times 129$ $y^+ \approx 0.25$ | $N_x \times N_y = 1269 \times 131$ $y^+ \approx 0.125$ |
| ТЗА | $N_x \times N_y = 338 \times 125$ $y^+ \approx 1$ | $N_x \times N_y = 338 \times 127$ $y^+ \approx 0.5$ | $N_x \times N_y = 338 \times 129$ $y^+ \approx 0.25$ | $N_x \times N_y = 338 \times 131$ $y^+ \approx 0.125$ |
| ТЗА- | $N_x \times N_y = 433 \times 309$ $y^+ \approx 1$ | $N_x \times N_y = 433 \times 313$ $y^+ \approx 0.5$ | $N_x \times N_y = 433 \times 317$ $y^+ \approx 0.25$ | |

В таблице 2

N_x и N_y — число ячеек по направлениям x и y ,

$y^+ = \rho u_\tau y / \mu$ — безразмерное расстояние от центра первой ячейки до пластины,

$u_\tau = \sqrt{\tau / \rho}$ — динамическая скорость,

τ — удельная вязкая сила, действующая на пластину.

На рисунках 2–4 представлены результаты расчетов тестов ТЗВ, ТЗА и ТЗА-. На рисунках приведены экспериментальные данные и корреляции

$$C_{f, \text{Лам.}} = 0.664 \cdot \text{Re}_x^{-0.5}, \quad (4.1)$$

$$C_{f, \text{Турб.1}} = 0.027 \cdot \text{Re}_x^{-1/7}, \quad (4.2)$$

$$C_{f, \text{Турб.2}} = 0.0592 \cdot \text{Re}_x^{-0.2}, \quad (4.3)$$

$$C_{f, \text{Турб.3}} = 0.288 \cdot (\lg \text{Re}_x)^{-2.45}, \quad (4.4)$$

$$C_f = \frac{2\tau}{\rho V_\infty^2}, \quad \text{Re}_x = \rho V_\infty x / \mu.$$

Выражение (4.1) — корреляция Блазиуса для коэффициента трения при ламинарном безградиентном обтекании пластины — см. [Шлихтинг, 1974]. Выражения (4.2), (4.3) — корреляции для коэффициента трения при турбулентном обтекании пластины — см., соответственно, [Шлихтинг, 1974], [Abu Darag, Uruba, Horak, 2011] и [Crabtree, Dommett, Woodley, Farnborough, 1970]. Отметим, что в книге [Семёнов, 2013] корреляция (4.2) приводится с коэффициентом 0.0263. Также в литературе эта корреляция встречается с коэффициентом 0.0277.

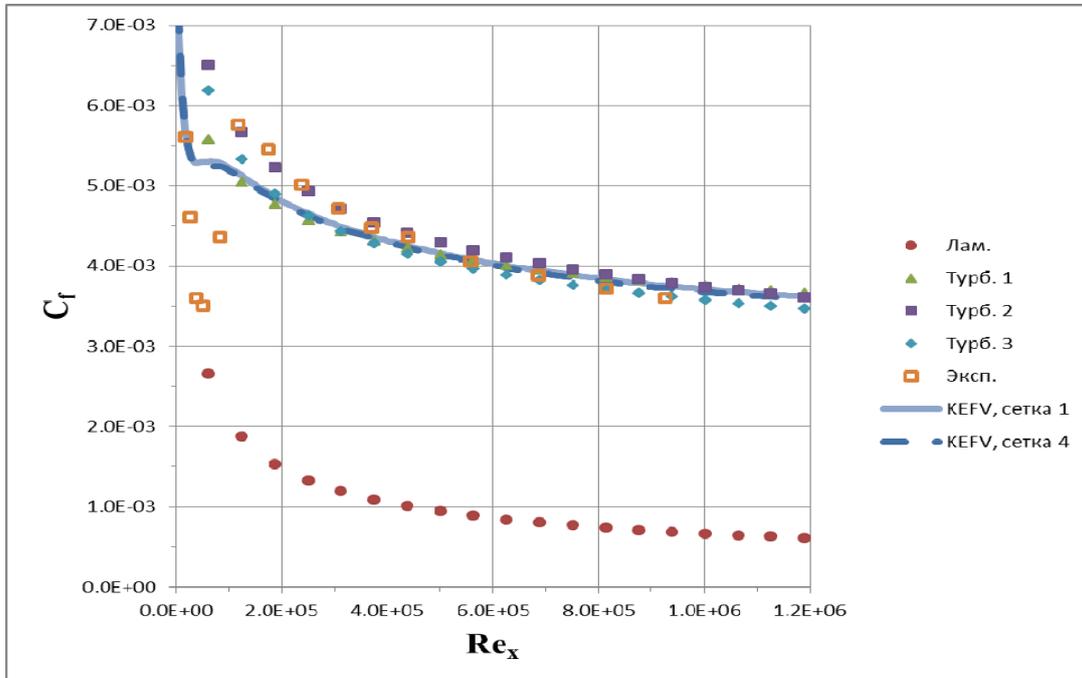


Рис. 2. Тест ТЗВ, коэффициент трения

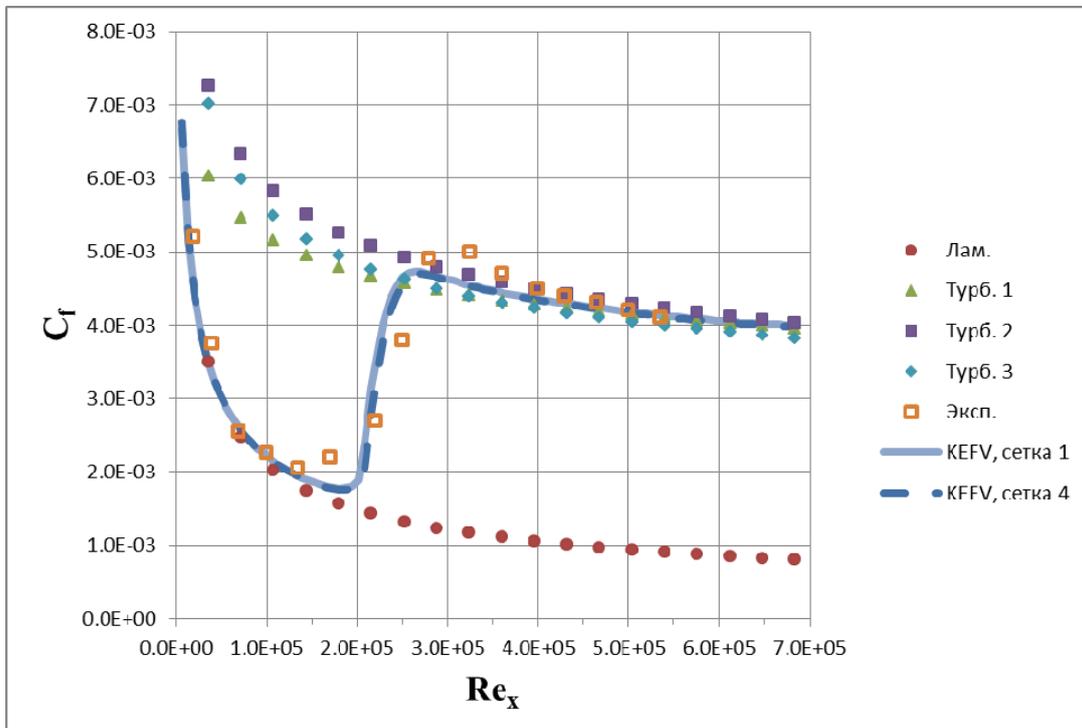


Рис. 3. Тест ТЗА, коэффициент трения

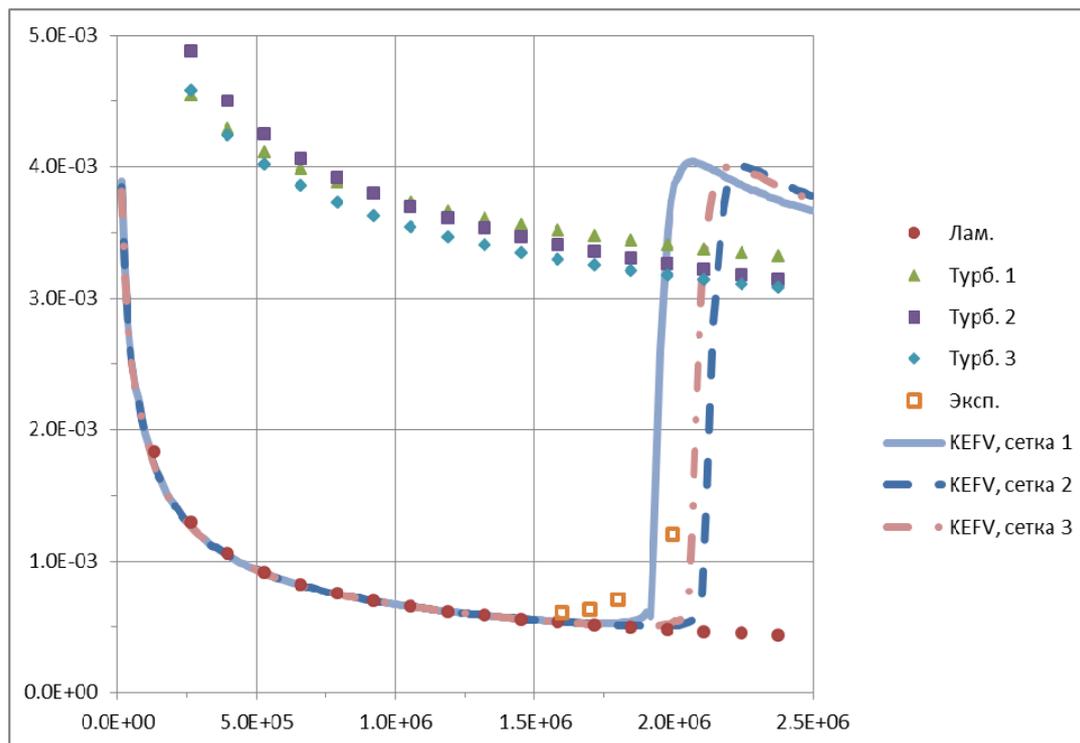


Рис. 4. Тест ТЗА-, коэффициент трения

Как видно из рисунков, модель KEFV адекватно воспроизводит корреляцию Блазиуса для коэффициента трения на ламинарном участке течения жидкости / газа около пластины, положение ламинарно-турбулентного перехода и корреляции для коэффициента трения на турбулентном участке течения жидкости / газа около пластины. Зависимость результатов от сетки — слабая.

Выводы

Главный вывод настоящей работы: байпасный ламинарно-турбулентный (ЛТ) переход можно предсказывать в рамках $k-\varepsilon$ подхода с помощью несложной низкорейнольдсовой модели турбулентности. Такая модель (KEFV) реализована в ПК FlowVision. Ее возможности демонстрируются на известных тестовых задачах ТЗВ, ТЗА и ТЗА-. Модель KEFV (как и многие другие модели турбулентности) не является универсальной. По этой причине все модельные константы выведены в интерфейс ПК FlowVision. Таким образом, пользователь при необходимости может настраивать модель на определенный тип течений.

Модель KEFV не требует чрезмерного измельчения сетки около твердой поверхности. Адекватные результаты получаются при $y^+ \leq 1$ (y^+ — безразмерное расстояние от стенки до центра примыкающей к стенке ячейки). В то же время нужно отметить, что на более грубых сетках ($y^+ > 1$) получить ламинарно-турбулентный переход удавалось не всегда. Модель KEFV проверена на гистерезисные эффекты. Продемонстрирована сеточная сходимость результатов расчетов.

Предлагаемая $k-\varepsilon$ модель турбулентности существенно проще известных модификаций модели SST $k-\omega$ [Langtry, Menter, 2009; Гарбарук, Стрелец, Шур, 2012]. Она позволяет эффективно (с точки зрения используемых вычислительных ресурсов) решать сложные трехмерные промышленные задачи.

Список литературы

- Аксенов А. А., Жлуктов С. В., Платов С. А. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода на корпусе судна в программном комплексе FlowVision // Судостроение. — 2013. — № 4. — С. 58–60.
- Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М. Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1109–1125.
- Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. Учебное пособие. — Санкт-Петербург: Издательство Политехнического Университета, 2012. — 88 с.
- Жигулёв В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1987. — 282 с.
- Семёнов В. П. Основы механики жидкости. Учебное пособие. — М.: ФЛИНТ, 2013. — 375 с.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
- Abe K., Kondoh T., Nagano Y. A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching flows-I. Flow Field Calculation // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. — 1994. — Vol. 37, No. 1. — P. 139–151.
- Abu Darag S., Uruba V., Horak V. An Evaluation of Novel Integral Scheme for Calculations of Transitional Boundary Layers // Colloquium FLUID DYNAMICS, Institute of Thermomechanics AS CR, v.v.i., Prague, Czech Society for Mechanics, the ERCOFTAC Czech Pilot Centre, 2011. — 6 p.
- Babajee J. Detailed Numerical Characterization of the Separation-Induced Transition, Including Bursting, in a Low-Pressure Turbine Environment // Doctoral thesis, ISBN 978-2-87516-068-3, Published by the von Karman Institute for Fluid Dynamics with permission, 2014. — 259 p.
- Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of isotropic turbulence in the initial period // Proceedings of Royal Society, London, A 193, 1948. — P. 539–558.
- Chien K.-Y. Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model // AIAA Journal. — 1982. — Vol. 20, No. 1. — P. 33–38.
- Crabtree L. F., Dommert R. L., Woodley J. G., Farnborough R. A. E. Estimation of Heat Transfer to Flat Plates, Cones and Blunt Bodies // Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, London: Her Majesty's Stationery office, 1970. — 59 p.
- Cutrone L., De Palma P., Pascazio G., Napolitano M. An evaluation of bypass transition models for turbomachinery flows // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2007. — Vol. 28. — P. 161–177.
- Di Pasquale D., Ronay A., Garrett S. J. A selective review of CFD transition models // AIAA Paper No. 2009–3812, 39th AIAA Fluid Dynamics Conference, 22–25 June 2009, San Antonio, Texas. — 10 p.
- Langtry R. B., Menter F. R. Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes // AIAA Journal. — 2009. — Vol. 47, No. 12. — P. 2894–2906.
- Lien F. S., Chen W. L., Leschziner M. A. Low Reynolds-Number Eddy-Viscosity Modelling Based on Non-Linear Stress-Strain/Vorticity Relations // Engineering Turbulence Modelling and Measurements 3, Elsevier. — 1996. — P. 91–100.
- Mayle R. E. The Role of Laminar-Turbulent Transition in Gas Turbine Engines // Journal of Turbomachinery. — 1991. — Vol. 113. — P. 509–537.

- McComb W.D.* The Physics of Fluid Turbulence // Oxford Engineering Science Series – 25, Clarendon Press, Oxford, 1992. — 572 p.
- Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.* Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc., 2003. — P. 625–632.
- Park T. S., Sung H. J.* A nonlinear low-Reynolds-number k - ε model for turbulent separated and reattaching flows – I. Flow field computations // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1995. — Vol. 38, No. 14. — P. 2657–2666.
- Platov S., Golovnev I.* The critical analysis of models of turbulence of laminar-turbulent transition and a role of diffusion by pressure fluctuations // 10th International Conference on fluid Control, Measurements, and Visualisation, August 17–21, 2009. — 11 p.
- Rahman M. M., Siikonen T.* Near-wall turbulence modelling with enhanced dissipation // International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2003. — Vol. 42. — P. 979–997.
- Savill A. M.* A Synthesis of T3 Test Case Predictions // Numerical Simulation of Unsteady Flows and Transition to Turbulence, ed. O. Pironneau, W. Rodi, I. L. Ryming, A. M. Savill, and T. V. Truong. C.U.P.: New York, 1992. — P. 404–442.
- Wilcox D. C.* Turbulence modeling for CFD // DCW Industries, Inc. — 1994. — 460 p.