

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ВОРОТНОЙ ВЕНЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПК FLOWVISION

---

*V Всероссийская конференция с международным участием  
«Математика в медицине»*

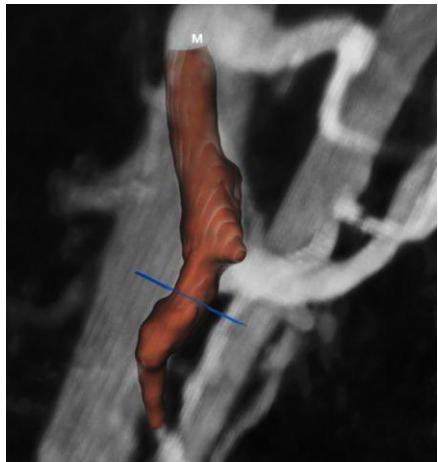
01-02.12.2025

А.А. Аксенов

М.Ю. Лимарева

А.И. Лобанов

Ю.В. Фишер



*Благодарность за предоставленные материалы: Б.И. Яремину и Б.И. Казымову*

# Описание задачи моделирования

## Постановка задачи:

Исследуется течение крови в воротной вене (ВВ)

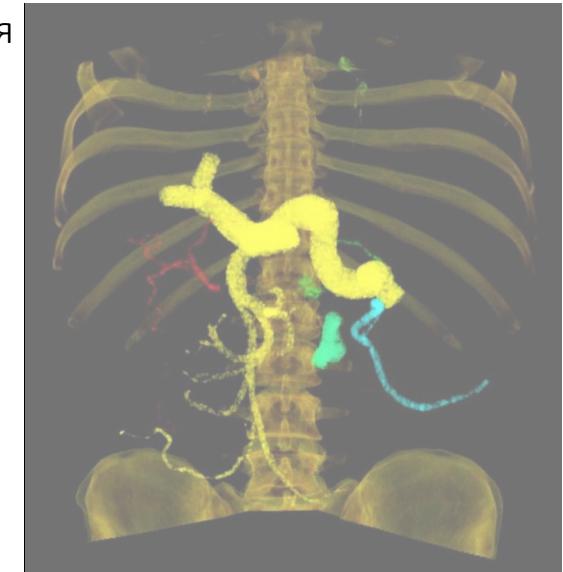
## Режим течения:

- Существенно нестационарный
- На значения скорости влияют как сердечные, так и дыхательные ритмы

## Цели работы:

- Создание расчетной модели воротной вены человека в ПК FlowVision с учетом сложной реологии крови
- Выполнение нестационарного расчета с использованием разработанной модели для демонстрации возможности решения задач подобного класса в ПК FlowVision
- Определение структуры течения

Состав крови воротной вены отличается от состава крови в остальных сосудах из-за специфики функций ВВ – перенос веществ от желудка к печени

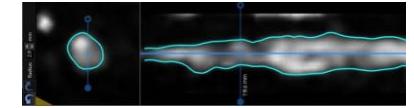


## Триада Вирхова

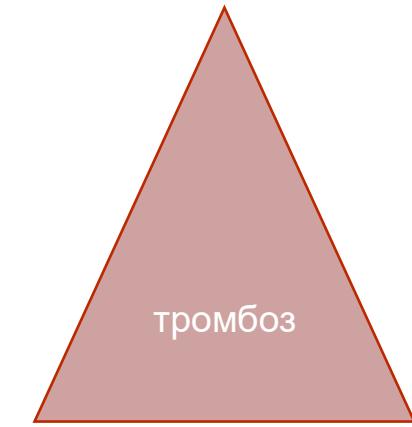
---

- Для создания компьютерной модели необходим учет различных элементов триады
- Гемодинамика в воротной вене **неясна**
- Измерений *in vivo* мало для определения реологических параметров крови в ВВ

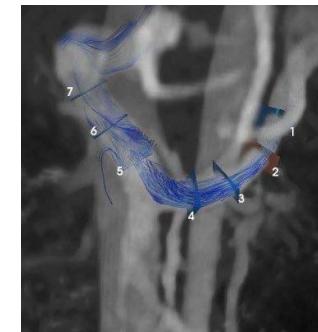
Состояние  
эндотелия



тромбоз



Гемодинамика



Гиперкоагуляция

# Математическая модель движения крови в воротной вене (1/2)

---

- Гемодинамика определяется реологией
- Кровь – неьютоновская жидкость:
  - Модель Каро:**

$$\mu = e^{-\alpha(T_{abs} - T_{ref})} \left[ \mu_{min} + (\mu_{max} - \mu_{min})(1 + \lambda^2 S)^{\frac{n-1}{2}} \right]$$

$$n = 0,344$$

$$\mu_{min} = 0,0032 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\mu_{max} = 0,0456 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\lambda = 10,03 \text{ с}$$

$$\alpha = 0$$

$$T_{ref} = 310 \text{ К}$$

**Кровь →**

$\rho = 1050 \text{ кг}/\text{м}^3$  – плотность

**Физические процессы →**

Уравнения движения в приближении  
эффективной вязкости  $\mu$

**Опорные величины →**

- $P_{ref} = 101395 \text{ Па}$
- $T_{ref} = 309,75 \text{ К}$

## Математическая модель движения крови в воротной вене (2/2)

---

- Гемодинамика определяется реологией
- Кровь – неньютоновская жидкость:

- Модель Куемады:**

$$\mu = \mu_f \left[ 1 - \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\frac{|I_2|^{\frac{1}{2}}}{\gamma_{cr}}}}{2 \left( 1 + \sqrt{\frac{|I_2|^{\frac{1}{2}}}{\gamma_{cr}}} \right)} \varphi_d \right]^{-2}$$

$$\mu_f = 0,0006 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\mu_{min} = 0 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\mu_{max} = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\gamma_{cr} = 10 \frac{1}{\text{с}}$$

**Варьируемые параметры:**

$$k_0 \geq 2$$

$$k_\infty \geq 1,6$$

$$\varphi_d = 0,2 \dots 0,4 \text{ – гематокрит}$$

**Кровь →**

$$\rho = 1050 \text{ кг/м}^3 \text{ – плотность}$$

**Физические процессы →**

Уравнения движения в приближении эффективной вязкости  $\mu$

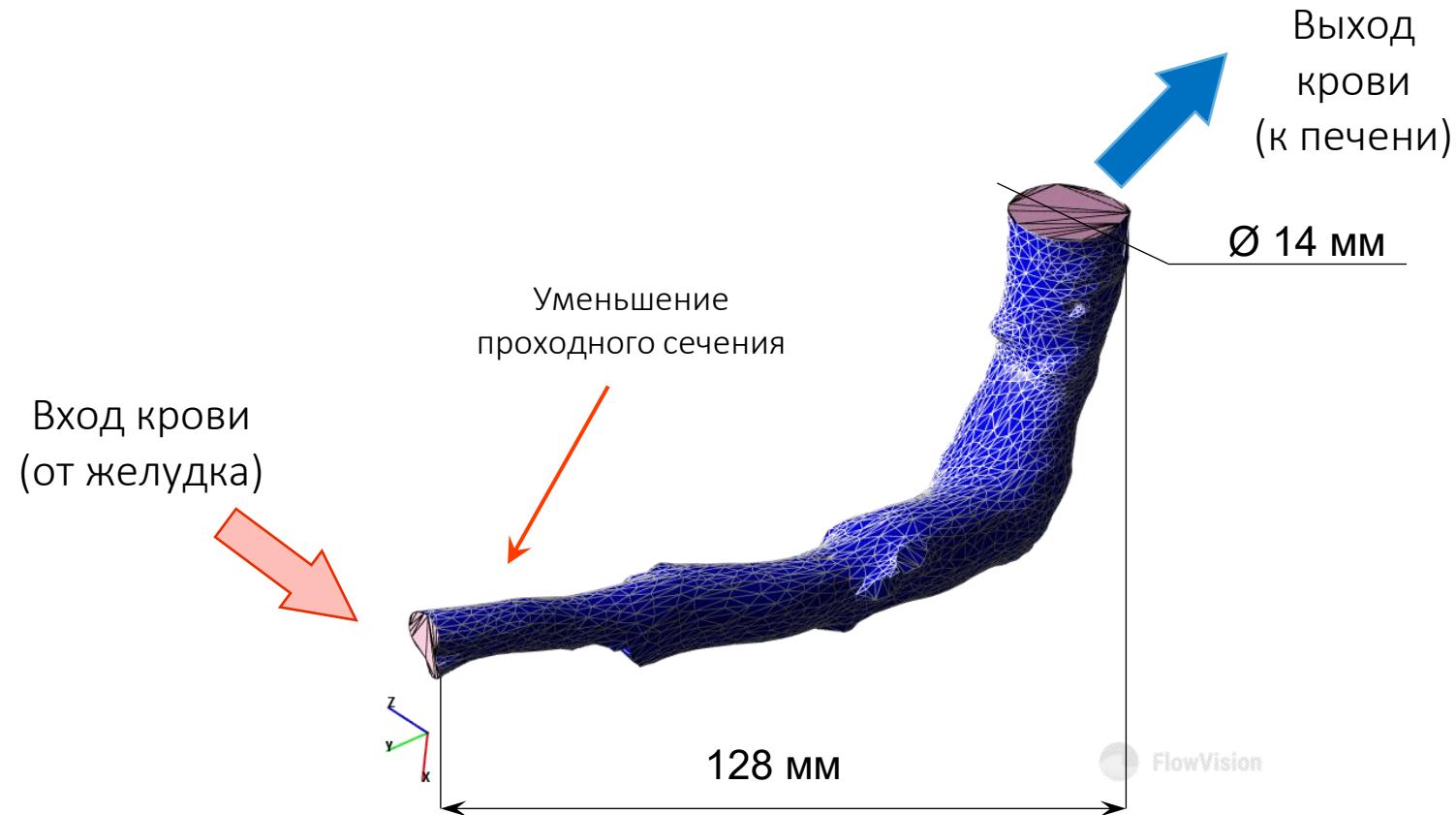
**Опорные величины →**

- $P_{ref} = 101395 \text{ Па}$

- $T_{ref} = 309,75 \text{ К}$

## Геометрическая постановка задачи

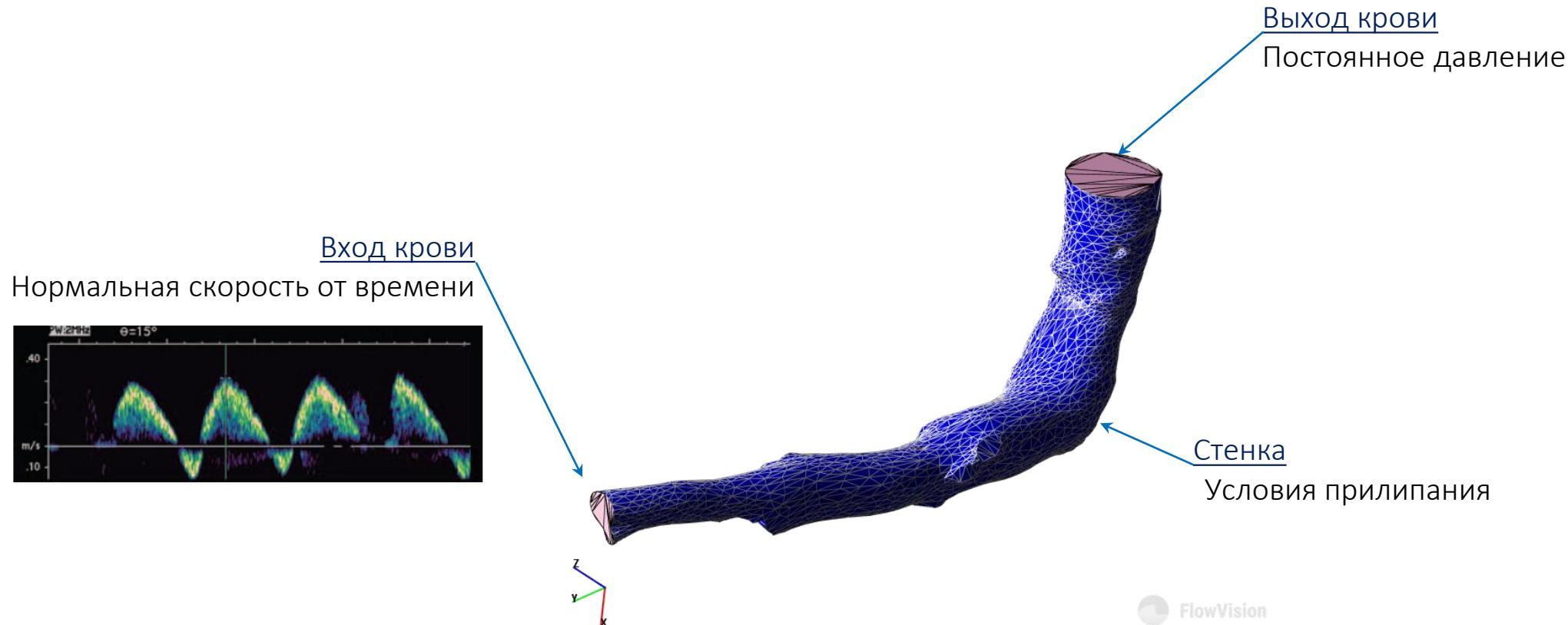
- Воротная вена человека – один из крупных сосудов системы кровообращения печени
- Характерные размеры – длина 6-10 см, диаметр до 1,5 см



\* Геометрическая модель – из открытых источников

## Граничные условия

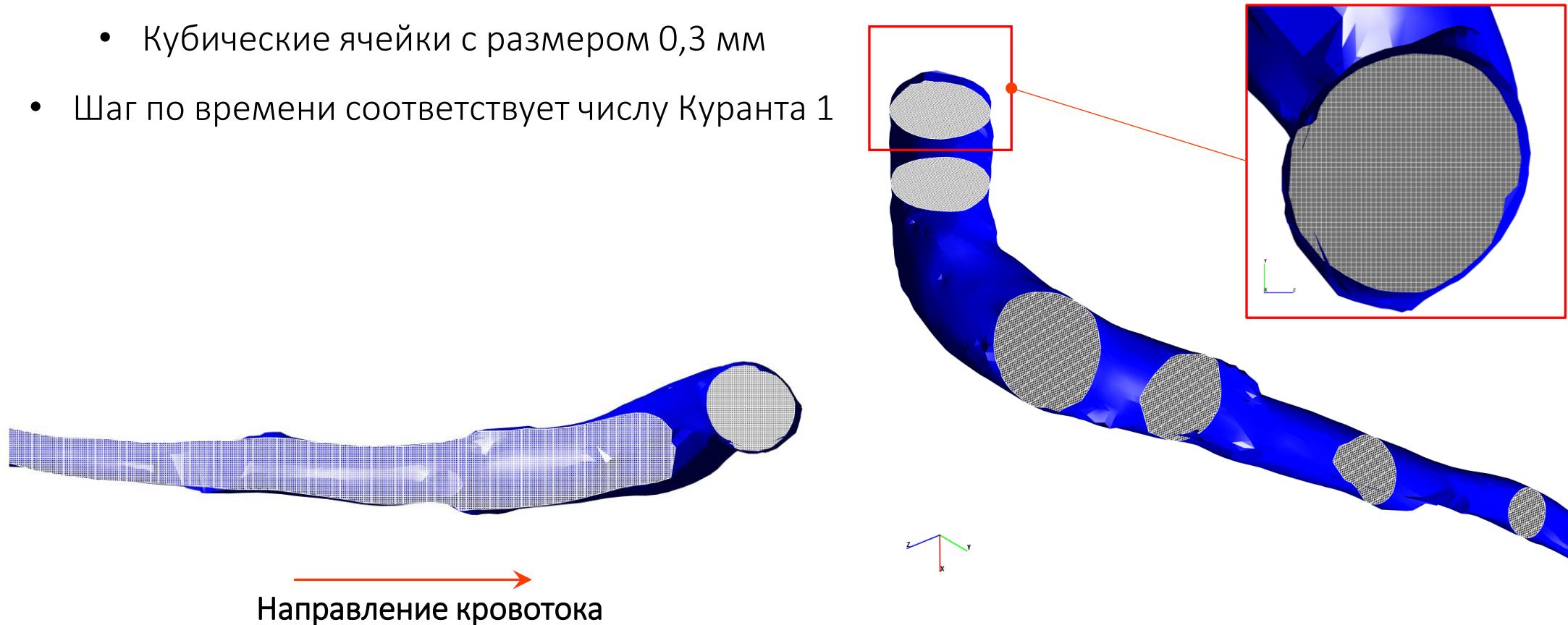
- Динамика крови на входе задавалась по данным доплеровских измерений\*



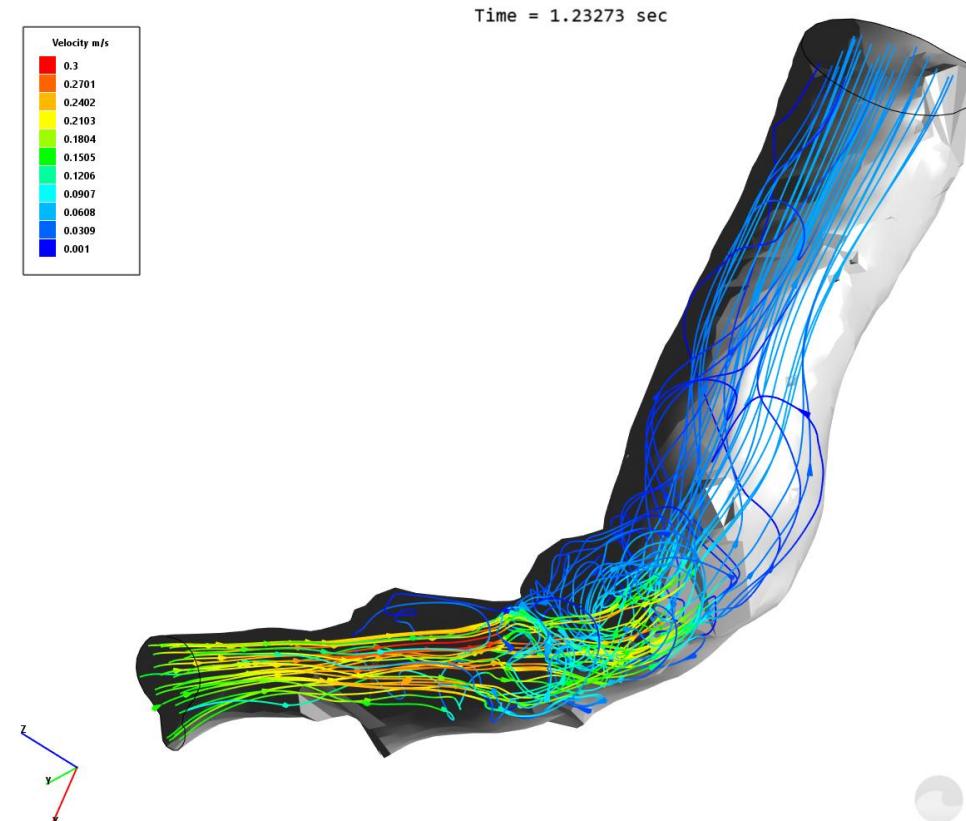
\* McNaughton D. A., Abu-Yousef M. M. Doppler US of the liver made simple //Radiographics. – 2011. – Т. 31. – №. 1. – С. 161-188.

## Дискретизация расчетной области

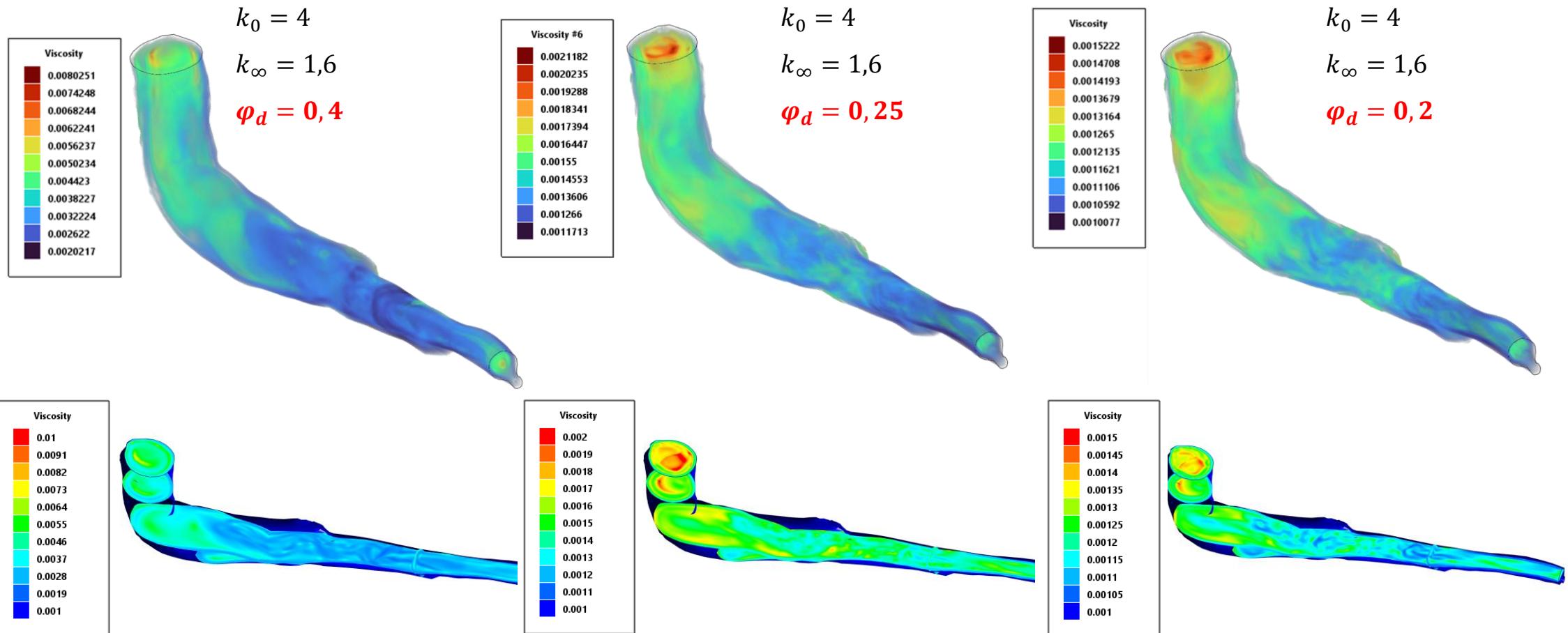
- Расчетная сетка содержит 580 000 ячеек:
  - Кубические ячейки с размером 0,3 мм
  - Шаг по времени соответствует числу Куранта 1



Результаты расчета  
Нестационарное решение



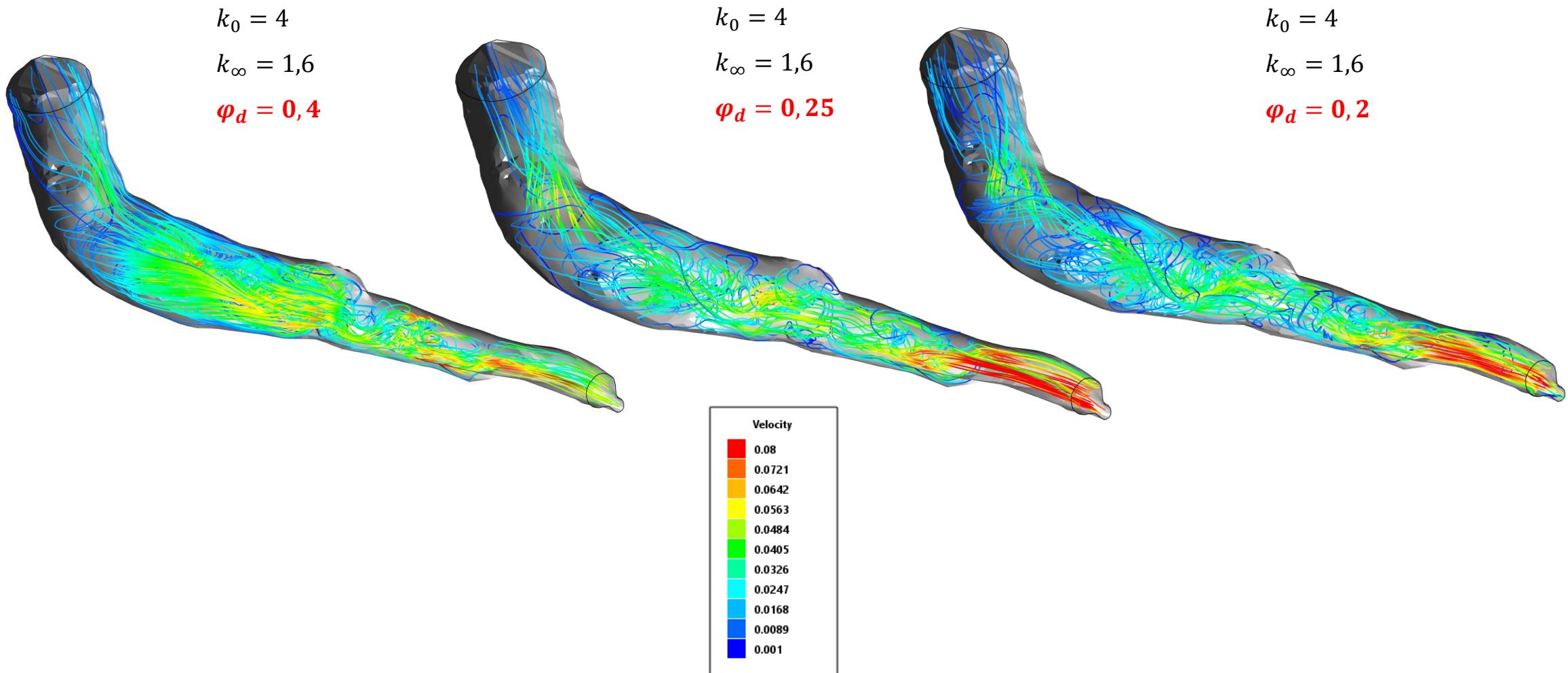
# Результаты расчетов с моделью Куемады



- Уменьшение гематокрита может приводить к стратификации течения

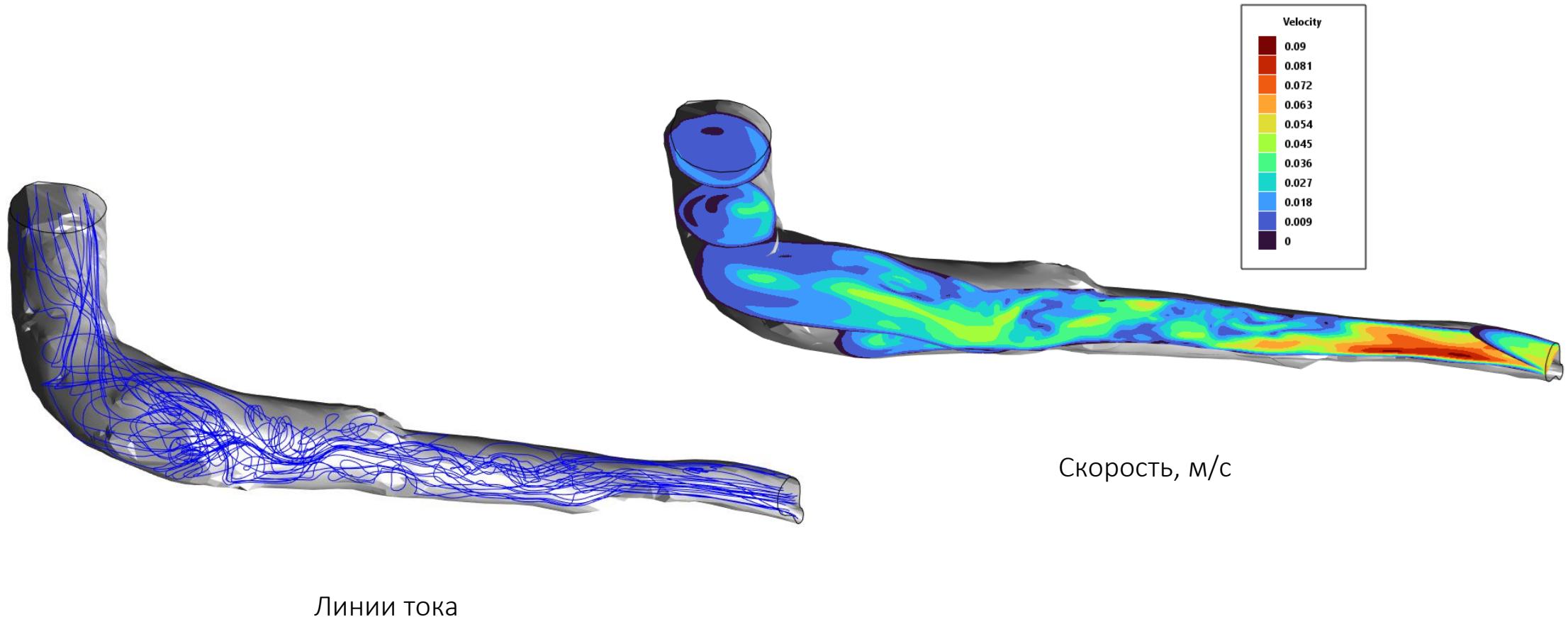
## Результаты расчетов с моделью Куемады

---

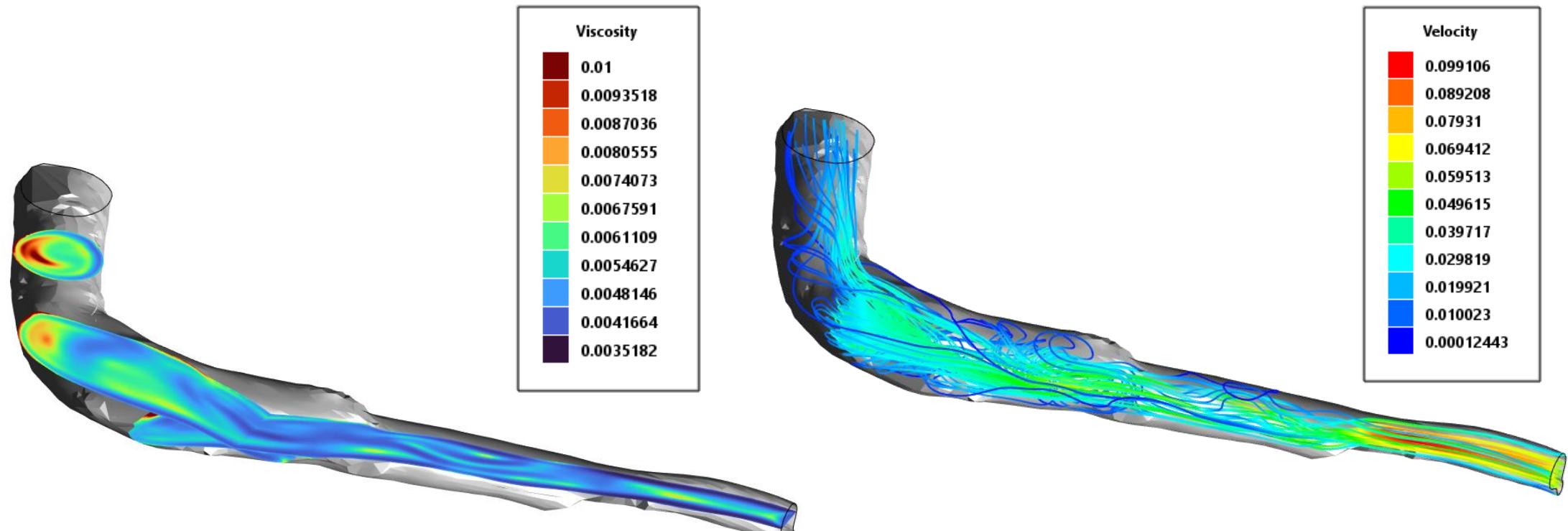


# Результаты расчетов с моделью Куемады

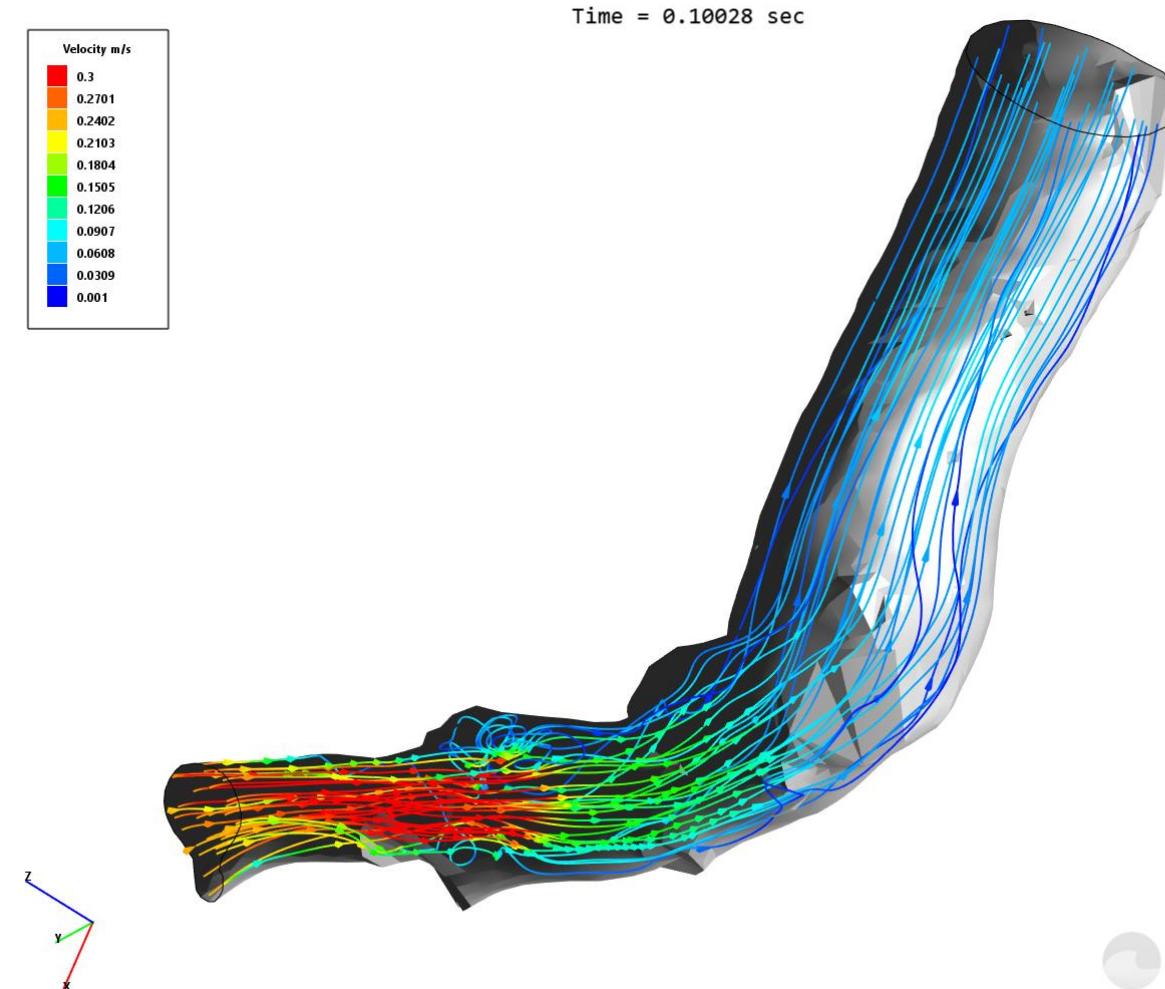
$$k_0 = 4; k_\infty = 1,6; \varphi_d = 0,2$$



## Результаты расчетов с моделью Каро

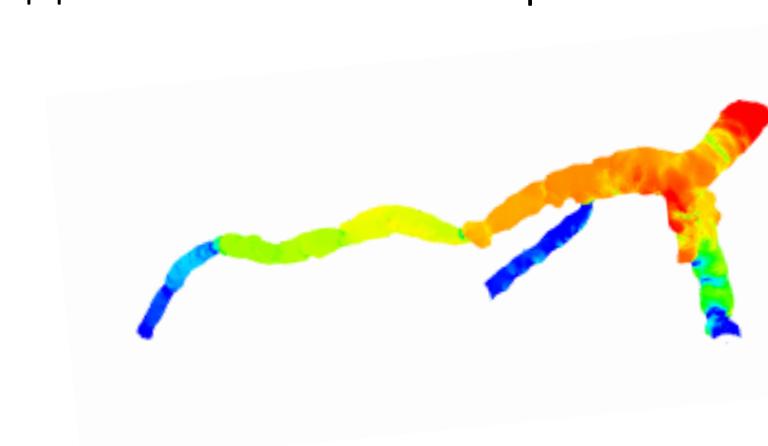


# Изменение скорости крови, м/с, во времени



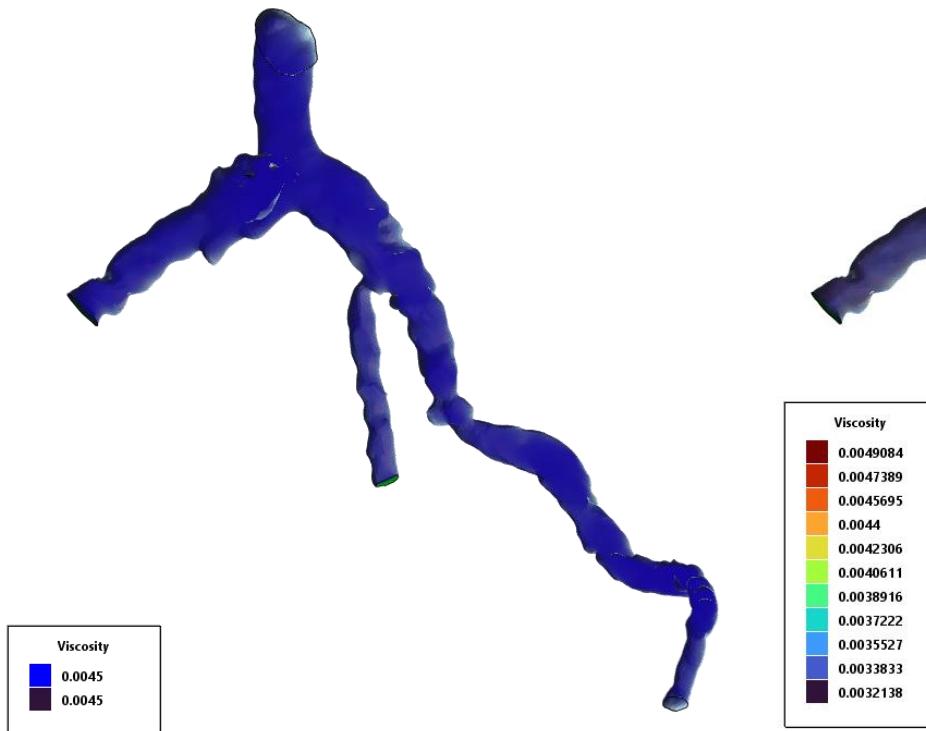
---

Результаты расчета с различными моделями вязкости крови  
В коронарной артерии

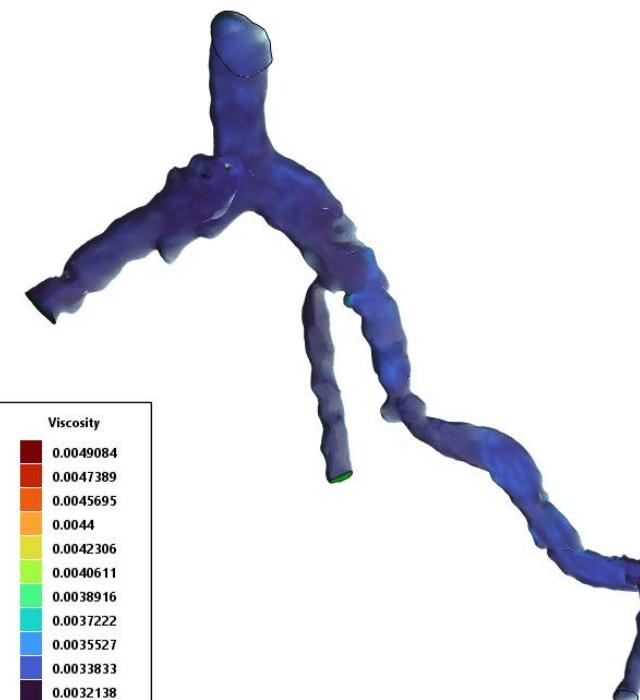


# Сравнение реологических моделей

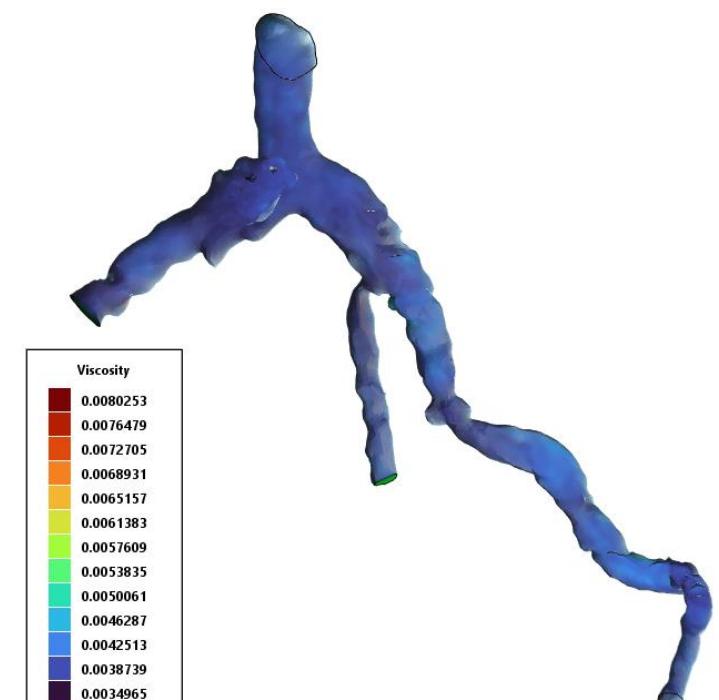
Ньютоновское  
приближение



Модель Каро  
Оптимизирована под коронарный кровоток



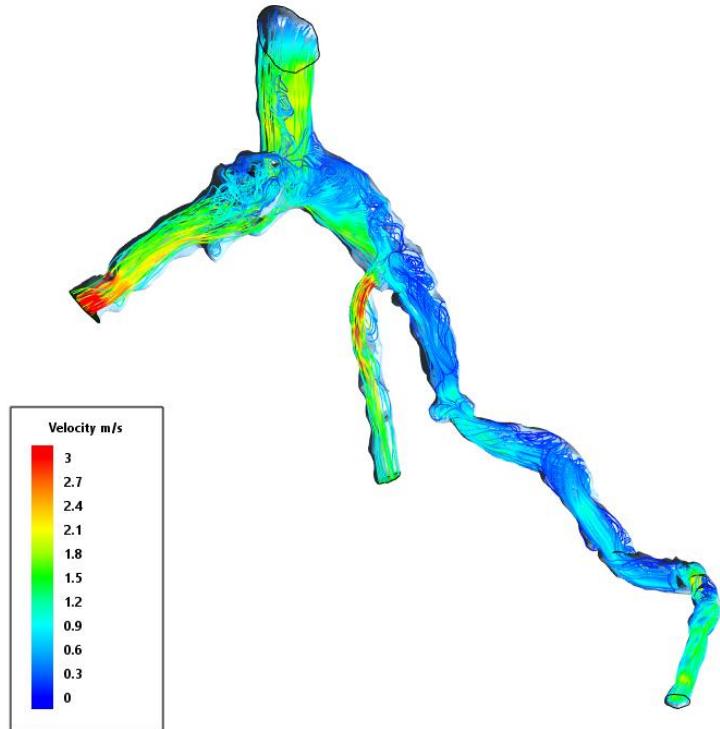
Модель Куемады  
Оптимизирована под коронарный кровоток



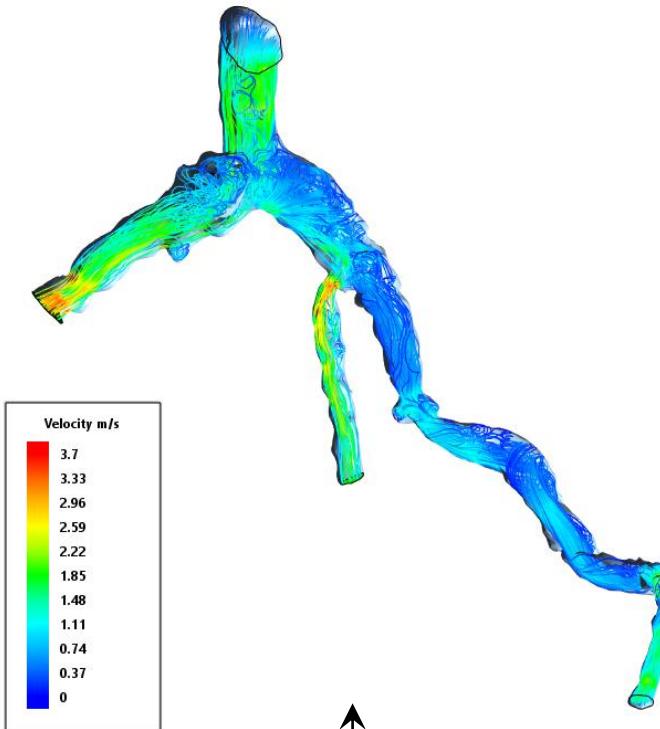
\* Геометрическая модель и параметры кровотока в артерии взяты из: Carson J. M. et al. Non-invasive coronary CT angiography-derived fractional flow reserve: a benchmark study comparing the diagnostic performance of four different computational methodologies //International journal for numerical methods in biomedical engineering. – 2019. – Т. 35. – №. 10. – С. e3235.

# Сравнение реологических моделей

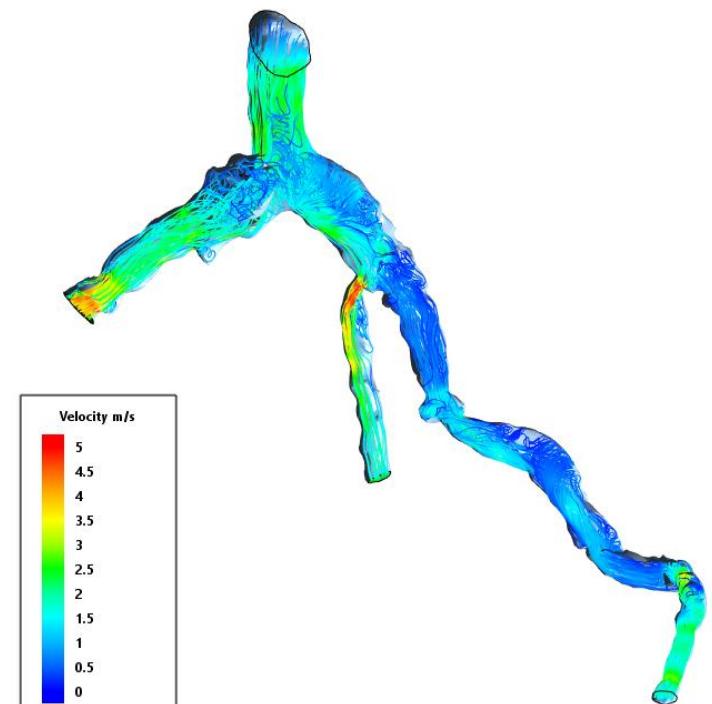
Ньютоновское  
приближение



Модель Каро  
*Оптимизирована под коронарный кровоток*



Модель Куемады  
*Оптимизирована под коронарный кровоток*



← ↑ →  
**Несущественное различие в картине течения!**

## Заключение

---

1. Проведено моделирование нестационарного течения крови в воротной вене с использованием реологических моделей Каро и Куемады
2. По сравнению с ньютоновской жидкостью определены области с сильным конвективным перемешиванием и картина стратификации течения при высоких скоростях течения крови.
3. Состав крови в воротной вене отличается от других участков сосудистого русла и достоверно неизвестен
4. Дальнейшее развитие модели:
  - Учет состава крови в воротной вене
  - Пациент-ориентированные геометрические модели ВВ