

1 Описание задачи

В качестве исследовательской задачи рассматривается ламинарное дозвуковое обтекание цилиндра диаметра $D = 0.02$ метра. Рабочим телом является воздух. Свойства газа берутся из базы веществ ПК FlowVision при температуре 25°C . Плотность газа в таком случае является баротропной, зависящей только от давления и вычисляется по закону для идеального газа $\rho = P/(R_r T)$. Течение реализуется при числах Рейнольдса из интервала от 1 до 20.

Цели:

- С помощью программного комплекса FlowVision решить задачу ламинарного обтекания цилиндра при дозвуковом течении.
- Сравнить полученные данные с экспериментальными, основываясь на источнике [1].
- Определить значение числа Рейнольдса, при котором начинается образование вихрей за цилиндром.

Задачи:

- Провести исследование сходимости интегрального параметра коэффициента лобового сопротивления C_x по шагу по пространству h и шагу по времени τ . Определить для этого зависимости вида $C_x(D/h)$ и $C_x(\tau)$. Графиком изменения коэффициента C_x во времени t показать, что расчет сошелся к стационарному или к периодическому процессу.
- Проанализировать полученные графики и определить оптимальные параметры шага по времени и шага по пространству, которые будут использованы в серийных расчетах.
- Для обоснованных исследованиями выше параметров расчета провести серию численных экспериментов для значений числа Re из интервала $1 \leq Re \leq 20$. Определить, при каком значении начинает формироваться вихрь за цилиндром.
- Показать картины течения до и после формирования вихря при помощи слоев визуализации. Показать, что картины течения различны.
- Сравнить полученный коэффициент сопротивления цилиндра с результатами эксперимента, представленными в источнике [1].

Список переменных

D	Диаметр цилиндра
ρ	Плотность
P	Давление
T	Температура
R_g	Газовая постоянная
C_x	Коэффициент лобового сопротивления
h	Шаг по пространству
τ	Шаг по времени
t	Время
T_{avg}	Половина времени осреднения
Re	Число Рейнольдса
\mathbf{v}	Вектор скорости
v	Длина вектора скорости
η	Динамическая вязкость
x	Коэффициент масштабирования расчетной области
S	Характерная площадь цилиндра
F_{fluid}	Сила, действующая со стороны жидкости на цилиндр

Список операторов

∇	Оператор градиента
Δ	Оператор Лапласа

Список сокращений

IC	Начальные условия
BC	Граничные условия
CFL	Число Куранта-Фридрихса-Леви

Список индексов

$inlet$	Вход
$wall$	Стенка
$outlet$	Выход
x	x -компонента вектора
∞	Значение параметра в свободном потоке
0	Значение параметра в начальный момент времени

2 Постановка задачи

Модель движения флюида описывается системой уравнений Навье-Стокса для несжимаемого газа, неразрывности, начальными (IC) и граничными (BC) условиями. Упрощенная постановка выбирается исходя из режима набегающего потока ($Re \in [1, 20]$). При значениях числа Маха менее 0.3 сжимаемостью газа можно пренебречь [2]. Таким образом, систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$BC: v_{wall} = 0 \text{ м/с}, v_{inlet} = Const(Re), P_{outlet} = 1 \text{ атм}, \quad (3)$$

$$IC: v(r, 0) = v_0(r) = Const(Re). \quad (4)$$

В данном исследовании будет рассмотрена двумерная постановка задачи. Параметры геометрической модели вынесены на Рисунок 1.

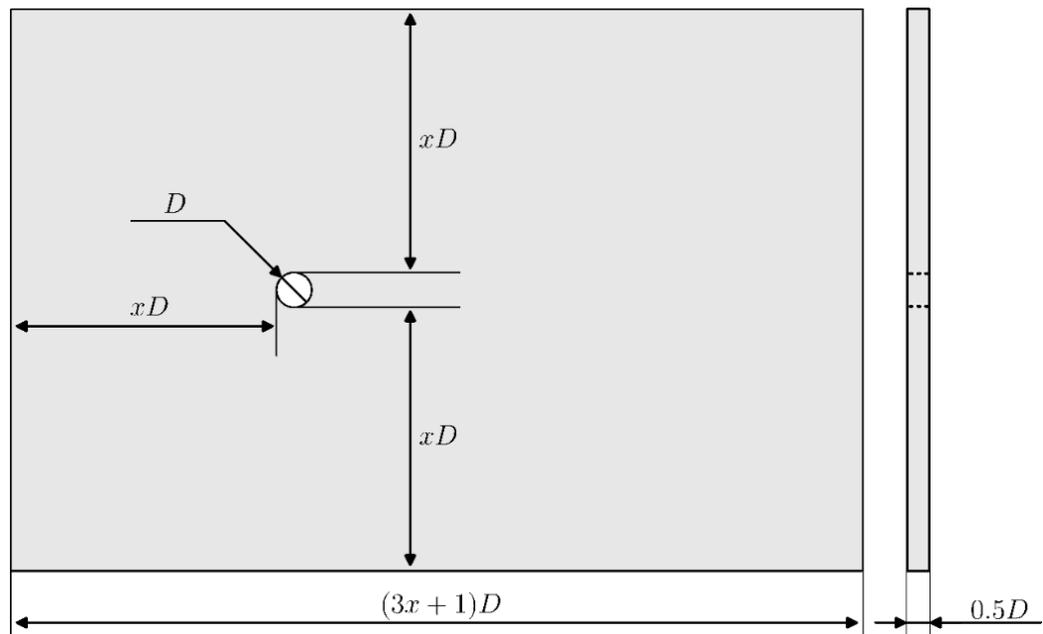


Рисунок 1 – Размеры геометрической модели. Диаметр цилиндра $D = 0.02$ м.

Размеры расчетной области должны быть определены из исследования сходимости по расчетной области, исходя из этого размеры области на изображении указаны с учетом их пропорциональной зависимости от коэффициента масштабирования x . Данное исследование проводится для определения влияния граничных условий на картину течения. Расстановка граничных условий представлена на Рисунке 2.

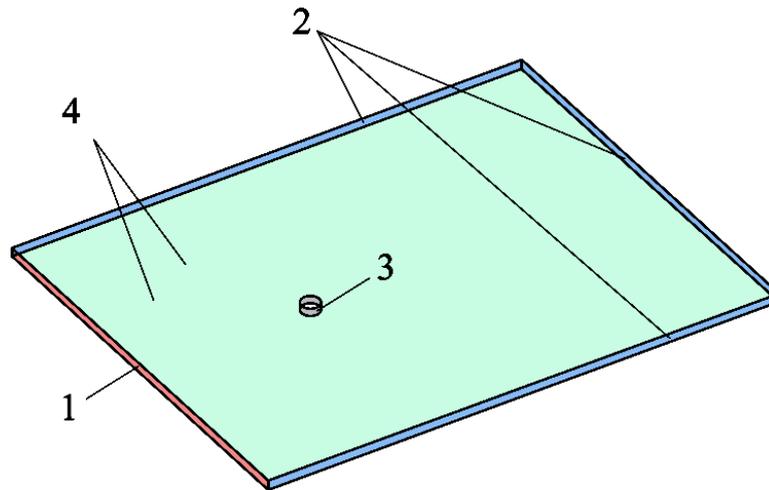


Рисунок 2 – Расстановка граничных условий

1. Вход	Тип: <i>Вход/Выход</i> Скорость: Фиксированная скорость $v = \frac{Re \cdot \eta}{\rho \cdot D}$; $Re \in [1; 20]$
2. Выход*	Тип: <i>Свободный выход</i> Давление (статическое): $P = 1$ атм
3. Стенка	Тип: <i>Стенка</i> Скорость: Прилипание
4. Симметрия	Тип: <i>Симметрия</i> Скорость: Проскальзывание

*Значения указаны в абсолютных величинах

3 Исследование сходимости

Влияние размеров расчетной области

Проведем исследование задачи по размерам расчетной области. Сетка в подобном исследовании должна выбираться одинаковой, варьируется лишь значение коэффициента x , представленное на Рисунке 1. Для проведения исследований были выбраны значения $x = 5, 10, 15, 20, 30, 50, 100$. Минимальное значение $x = 5$ выбирается на основе [3].

Исходя из диаметра цилиндра определим начальную сетку. Оптимальным размером является ячейки с длиной ребра $h = D/5$ (5 ячеек на характерный размер задачи) и составляет 4 миллиметра. Уточнение сетки (адаптация) проведена в объеме, который полностью включает в себя возвратную зону за цилиндром [3] (См. Рисунок 3). На Рисунке 3 представлена сетка со вторым уровнем адаптации в объеме, каждый уровень которой имеет 10 слоев. Векторное поле скоростей показывает возвратную зону за цилиндром. Красная кривая отражает границу $v_x = 0$ — начало возвратной зоны.

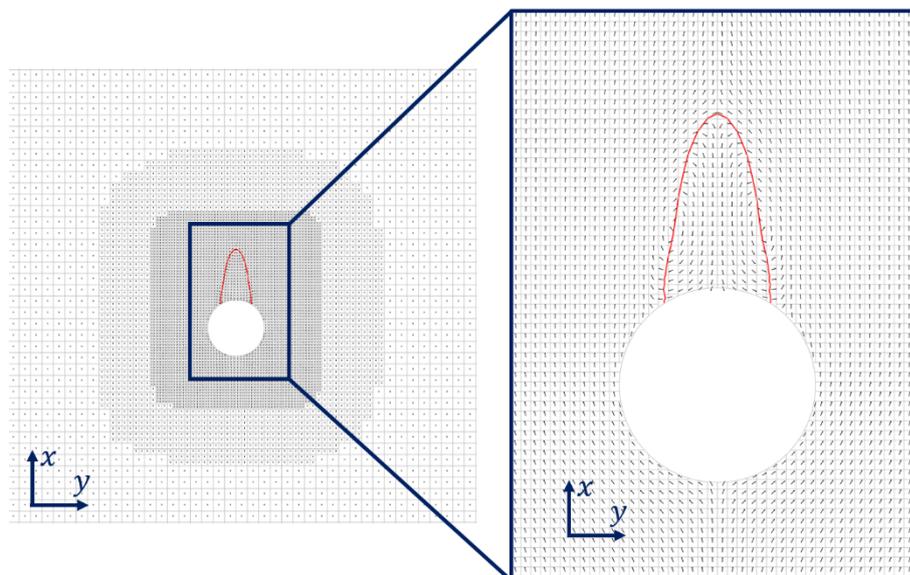


Рисунок 3 – Расчетная сетка для случая $Re = 20$.

Шаг по времени определяется критерием $CFL = 25$. В качестве критерия останова рассматривается коэффициент аэродинамического сопротивления C_x , который можно определить по формуле:

$$C_x = -\frac{2F_{fluidx}}{\rho_{\infty}v_{\infty}^2S}. \quad (5)$$

В данной формуле S – характерная площадь цилиндра, равная произведению его диаметра на высоту. F_{fluidx} – сила, действующая со стороны жидкости на цилиндр.

Результаты исследования сходимости по области представлены на Рисунке 4. Отклонение результатов малых расчетных областей ($x = 5$) от больших ($x = 100$) составляет 9%. Выбирая оптимальную область, можно сойтись на допустимом отклонении в 4%. Таким образом, для расчетной области выбран коэффициент $x = 10$, что соответствует исследованиям, представленным в [4].

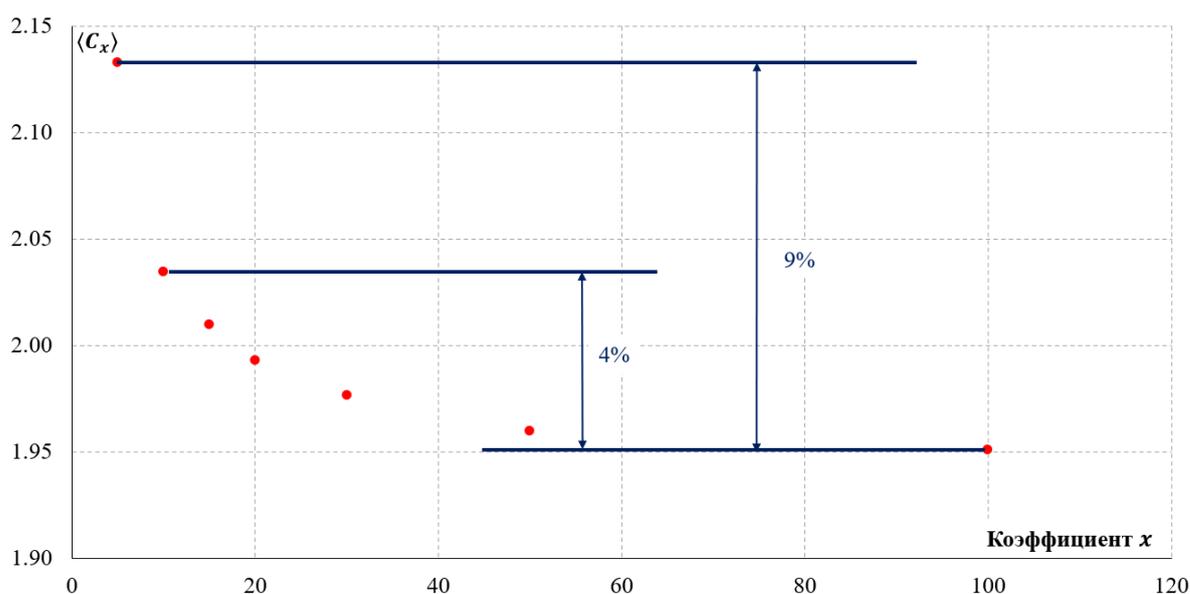


Рисунок 4 – Исследование сходимости коэффициента лобового сопротивления (среднего по времени) по области

Влияние расчетной сетки

Для проведения данного исследования на основе изучения влияния размеров расчетной области выбирается геометрия с коэффициентом масштабирования $x = 10$. Измельчение сетки проводится за счет адаптации, строится зависимость коэффициента лобового сопротивления от уровня адаптации. На каждый из уровней адаптации выделяется 10 слоев.

Результаты исследования сходимости по сетке представлены на Рисунке 5. Уточнение сетки влияет всего на 5% от выбранной начальной. Таким образом, допустимо выбрать вторую адаптацию с отклонением от подробной сетки 1%.

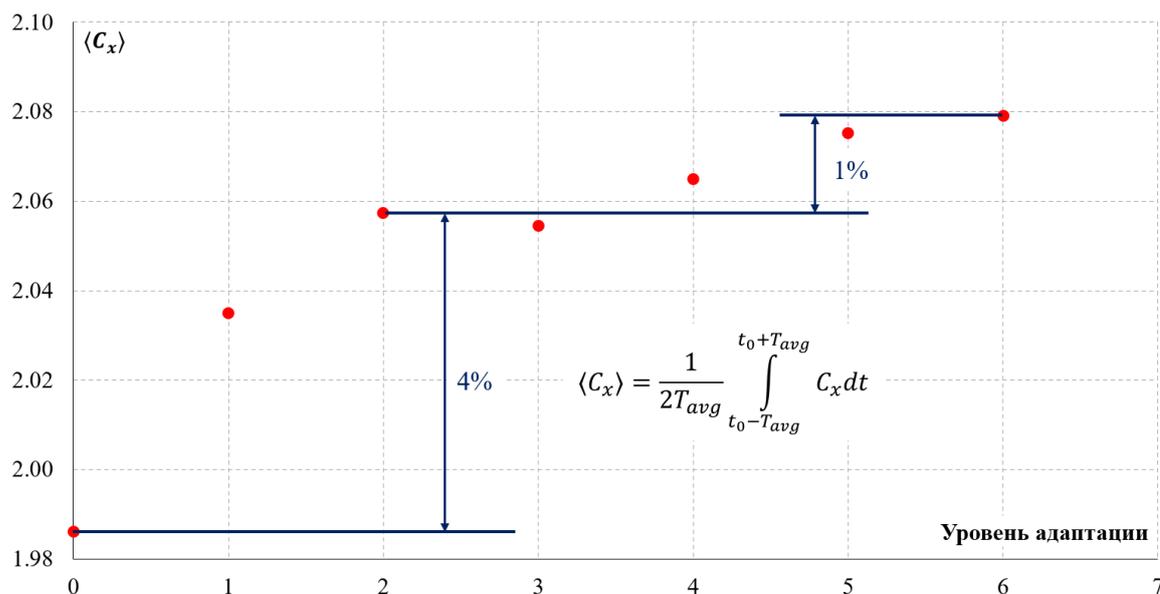


Рисунок 5 – Зависимость $\langle C_x \rangle$ от уровня адаптации по стенке цилиндра

Каждое значение коэффициента лобового сопротивления было получено путем усреднения результатов, представленных на Рисунке 6.

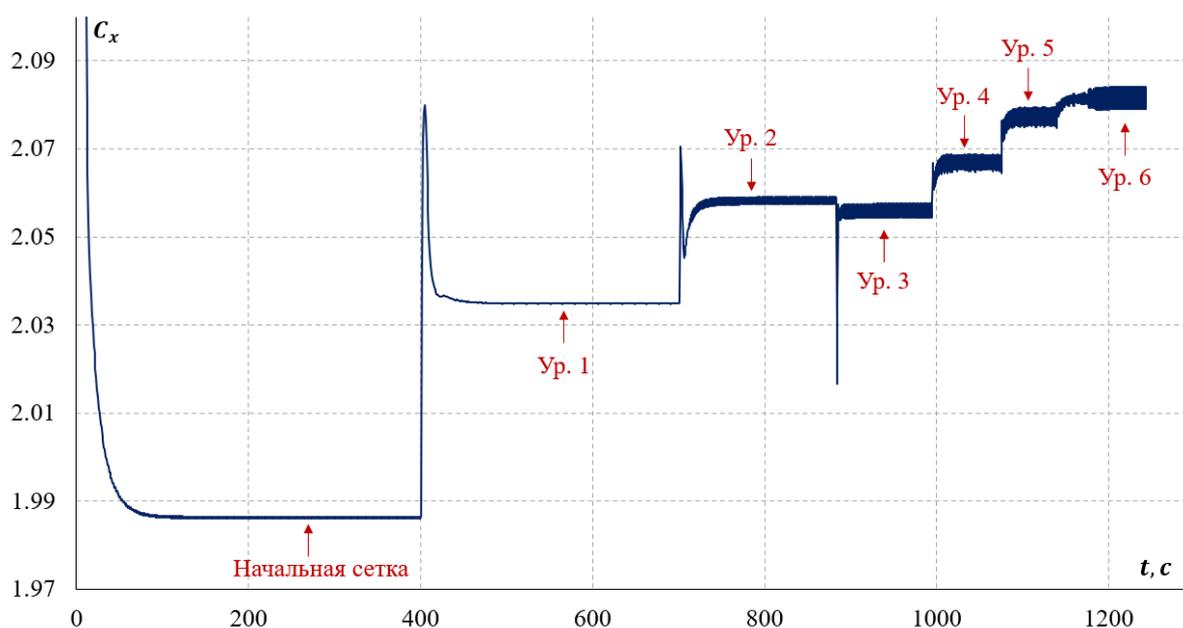


Рисунок 6 – Процесс сходимости во времени для различных уровней адаптации

Влияние шага по времени

Изучение влияния шага по времени проводится с параметрами, выбранными ранее (коэффициент масштабирования $\chi = 10$, второй уровень адаптации в объеме, 10 слоев на каждый уровень адаптации). В качестве критерия задания дискретизации по времени используется критерий Куранта-Фридрихса-Леви (CFL).

Для простоты описания далее примем обозначение $\langle C_x \rangle \equiv C_x$. Результаты исследования сходимости по шагу по времени представлены в таблице 3.1 в виде зависимости коэффициента лобового сопротивления C_x от числа CFL . Отличие $CFL = 100$ от $CFL = 1$ составляет менее 1%, соответственно допустимо проводить расчеты на $CFL = 100$.

Таблица 3.1 – Исследование сходимости по шагу по времени

CFL	100	25	1
C_x	2.0567	2.0563	2.0625

4 Результаты

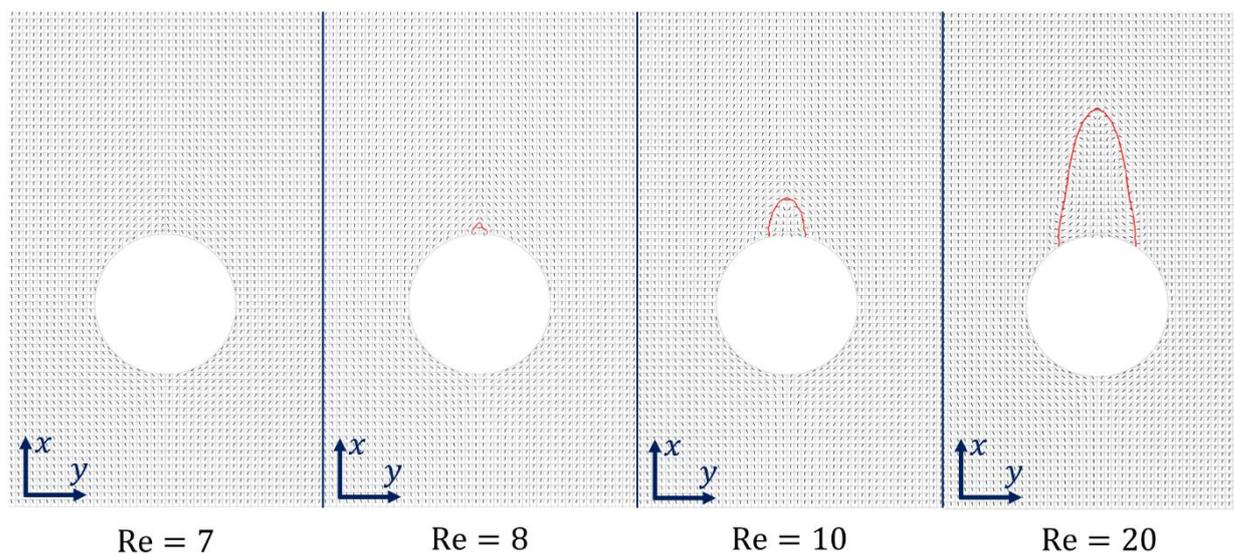


Рисунок 7 – Векторные поля скоростей в зависимости от числа Рейнольдса. Красная линия соответствует $v_x = 0$ м/с.

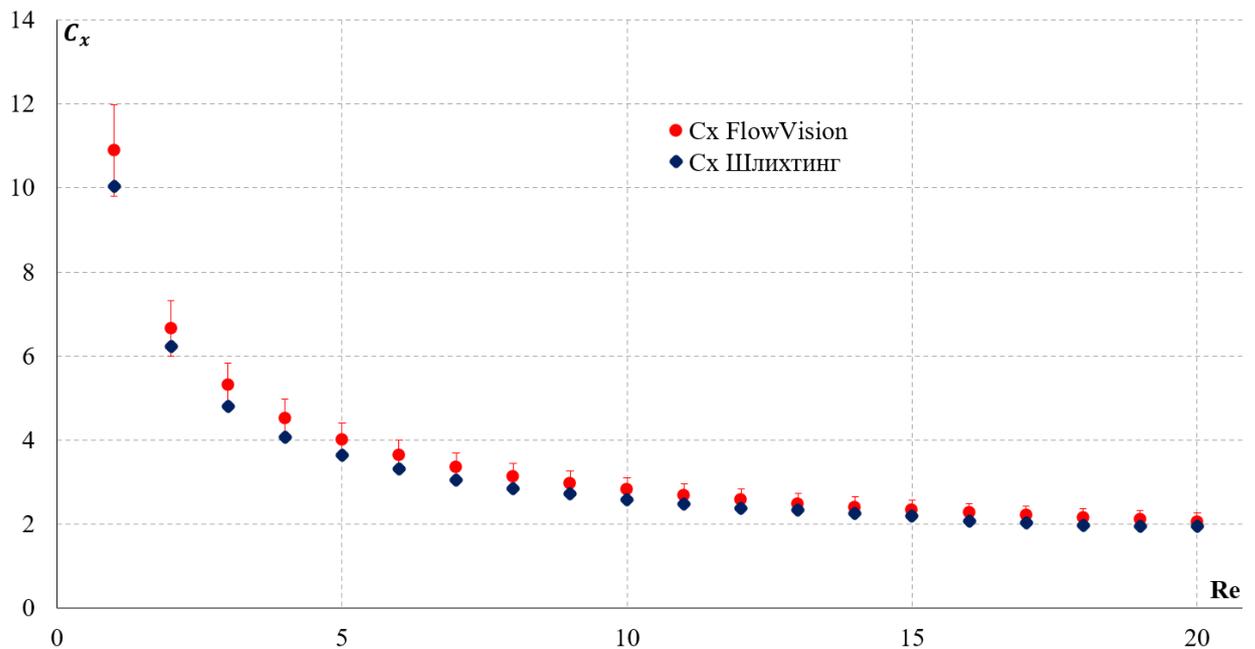


Рисунок 8 – Сравнение с экспериментом

Картины течения представлены на Рисунке 7. По картинам течения отчетливо видно начало формирования вихрей при значении числа Рейнольдса в диапазоне от 7 до 8. Полученные результаты коррелируют с работой [5]. Сравнение с данными из справочника Шлихтинга [1] представлено на Рисунке 8. Расхождение со справочником составляет не более 10%, что допустимо на основе [1,6], 5% из которых — погрешность расчетов, принятая при проведении исследований сходимости. Оставшиеся 5% возникают за счет таких факторов, как неточность оцифровки данных, и являются допустимой погрешностью при сравнении с экспериментом [7].

5 ВЫВОДЫ

- Определены размеры расчетной области, достаточные для получения требуемых результатов. Они соответствуют соотношению $10D/20D$ до и после исследуемого цилиндра.
- Определены оптимальные параметры дискретизации, достаточные для получения требуемых результатов. Среди них шаг по пространству $h = 1$ мм вблизи поверхности цилиндра ($h/D = 0.01$) и критерий для шага по времени $CFL = 100$.
- Значения полученных коэффициентов совпадают со справочными данными с точностью 10%.
- Точность проведенных исследований определяется на основе исследований сходимости (5%) и погрешности оцифровки данных (5%).
- Формирование вихрей за цилиндром происходит в диапазоне $Re = [7, 8]$, что подтверждается полученными картинками течения.

Список литературы

- [1] **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя : пер. с нем. / Г. Шлихтинг. — М. : Наука, 1974. — 712 с.
- [2] **Anderson J. D.** Fundamentals of Aerodynamics / J. D. Anderson. — 5th ed. — N. Y. : McGraw-Hill, 2010. — 1104 p.
- [3] **Dennis S. C. R., Chang G.-Z.** Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — Vol. 42, № 3. — P. 471–489.
- [4] **Tritton D. J.** Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. — 1959. — Vol. 6, № 4. — P. 547–567.
- [5] **Batchelor G. K.** An Introduction to Fluid Dynamics / G. K. Batchelor. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — 615 p.
- [6] **Roshko A.** On the development of turbulent wakes from vortex streets // NACA Technical Report. — 1954. — № 1191. — P. 1–28.
- [7] **Roache P. J.** Verification and Validation in Computational Science and Engineering / P. J. Roache. — Albuquerque : Hermosa Publishers, 1998. — 446 p.