

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)**

**ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ  
ПРОГРАММ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСОВ  
МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

**Учебное пособие**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области прикладных математики и физики в качестве учебного пособия по механике жидкости и газа для студентов высших учебных заведений по направлению 511600 "Прикладные математика и физика" и другим родственным направлениям и специальностям*

Москва 2005

УДК 532.5 : 533.6 : 519.688

*Пособие разработано в рамках межвузовской комплексной программы «Наукоемкие технологии образования»*

Рецензенты

Кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем Санкт-Петербургского государственного университета.

Зам. директора института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, д.ф.-м.н., профессор В.В. Жмур.

**Кондранин Т.В., Ткаченко Б.К., Березникова М.В., Евдокимов А.В., Зуев А.П. Применение пакетов прикладных программ при изучении курсов механики жидкости и газа: Учебное пособие — М.: МФТИ, 2005. — 104 с.**

Излагается технология применения средств компьютерного моделирования при изучении курсов механики жидкости и газа на основе учебных версий пакетов прикладных программ (ППП) Flow Vision и Gas Dynamics Tool.

На примерах задач из различных областей гидродинамики и газовой динамики рассматриваются возможности использования ППП для проведения вычислительного эксперимента, целью которого является максимально подробное воспроизведение, в том числе визуализация изучаемого явления, анализ и сопоставление получаемых численных данных с теоретическими результатами.

Содержание пособия соответствует программам курсов лекций и практических занятий по механике жидкости и газа, входящих в общепрофессиональную подготовку в МФТИ по направлению «Прикладные математика и физика». Пособие предназначено для студентов и преподавателей университетов и других вузов, обучающихся по этому и другим родственным направлениям и специальностям, в которых заметное место уделяется изучению механики жидкости и газа.

На приложенном компакт-диске содержатся учебные версии ППП Flow Vision и Gas Dynamics Tool с описаниями, а также другие упомянутые в пособии вспомогательные программы.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	6
Введение.....	7
Раздел 1. Общая характеристика учебных версий ППП Flow Vision и Gas Dynamics Tool .....	10
Глава 1. ППП Flow Vision.....	10
§ 1. Физико-математические модели .....	10
§ 2. Граничные и начальные условия .....	11
§ 3. Особенности численных расчетов .....	12
Глава 2. ППП Gas Dynamics Tool.....	13
§ 1. Физико-математические модели .....	13
§ 2. Граничные и начальные условия .....	13
§ 3. Особенности численных расчетов .....	14
Раздел 2. Решение учебных задач с использованием пакета Flow Vision .....	15
Глава 1. Состав и назначение основных моделей пакета .....	15
§ 1. Препроцессор.....	15
§ 2. Солвер.....	16
§ 3. Постпроцессор .....	16
Глава 2. Алгоритм моделирования в пакете Flow Vision.....	17
§ 1. Геометрический препроцессор (Solid Works).....	18
§ 2. Физико-математическая постановка задачи .....	19
§ 3. Подготовка к численному моделированию.....	20
§ 4. Моделирование с помощью солвера.....	22
§ 5. Подготовка к визуализации результатов.....	23
§ 6. Визуализация скалярных полей .....	23
§ 7. Визуализация отдельных числовых значений .....	25
§ 8. Визуализация векторного поля скорости .....	26
§ 9. Представление результатов и подготовка отчета.....	27
Глава 3. Течение вязкой жидкости в прямом плоском канале .....	28
§ 1. Основные соотношения .....	28

§ 2. Постановка задачи.....	30
§ 3. Задание .....	31
§ 4. Представление и анализ результатов.....	33
Глава 4. Обтекание круглого цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью .....	35
§ 1. Основные соотношения .....	35
§ 2. Постановка задачи.....	37
§ 3. Задание .....	38
§ 4. Представление результатов .....	39
Глава 5. Течение жидкости в канале переменного сечения .....	43
§ 1. Основные соотношения .....	43
§ 2. Постановка задачи.....	44
§ 3. Задание .....	45
§ 4. Представление результатов .....	47
Глава 6. Обтекание эллиптического цилиндра и плоской пластины идеальной несжимаемой жидкостью.....	49
§ 1. Основные соотношения .....	49
§ 2. Постановка задачи.....	50
§ 3. Задание .....	51
§ 4. Представление результатов .....	53
Глава 7. Удар воздуха о торец пластины.....	56
§ 1. Основные соотношения .....	56
§ 2. Постановка задачи.....	61
§ 3. Задание .....	61
Раздел 3. Решение учебных задач с использованием пакета Gas Dynamics Tool .....	64
Глава 1. Алгоритм моделирования в Gas Dynamics Tool.....	64
§ 1. Выбор параметров пакета .....	64
§ 2. Визуализация с помощью постпроцессора .....	65
§ 3. Проведение расчетов и представление результатов.....	66

Глава 2. Ударная волна .....	67
§ 1. Основные соотношения .....	67
§ 2. Постановка задачи .....	70
§ 3. Особенности выполнения задания .....	70
Глава 3. Истечение из сопла .....	71
§ 1. Основные соотношения .....	71
§ 2. Постановка задачи .....	73
§ 3. Задание и особенности его выполнения .....	73
§ 4. Представление результатов .....	75
Глава 4. Сверхзвуковой диффузор .....	76
§ 1. Потери полного давления в ударной волне .....	77
§ 2. Постановка задачи .....	79
§ 3. Моделирование диффузора .....	80
§ 4. Представление результатов .....	81
Глава 5. Удар воздуха о торец пластины .....	82
§ 1. Моделирование в Gas Dynamics Tool .....	82
§ 2. Представление результатов .....	83
Глава 6. Течения с подводом тепла и детонация (GDT) .....	86
§ 1. Основные соотношения .....	86
§ 2. Оценки параметров и диаграммное представление .....	88
§ 3. Постановка задачи .....	92
§ 4. Представление результатов .....	94
Заключение .....	95
Приложение .....	96
Список литературы .....	102

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый Вашему вниманию подход к овладению некоторыми разделами курса механики жидкости и газа с использованием прикладных программных пакетов дополняет существующую систему образования.

Использование прикладных программных пакетов (ППП) в курсах механики жидкости и газа (МЖГ) рассматривается как часть общей концепции применения компьютерных технологий в образовательном процессе. Изложение представляется замкнутым, однако его уровень рассчитан на читателя, который уже знаком с элементарными вопросами МЖГ.

Предлагаемые учебные версии ППП Flow Vision и Gas Dynamics Tool в совокупности удовлетворяют основным требованиям, которые необходимы для эффективного использования компьютерного моделирования в курсах МЖГ. Вместе они покрывают основные разделы МЖГ, имеют удобные пользовательские интерфейсы и ряд преимуществ, которые дополняют друг друга.

Разработка проводится в соответствии с планом Головного Совета Министерства образования и науки РФ по Межвузовской комплексной программе «Наукоемкие технологии образования» (МКП НТО), председатель Совета проф. Благовещенская М.М.

Авторы благодарят за помощь при выполнении работы А.А. Аксенова, С.А. Бобкова, В.А. Волкова, Г.В. Ганина, А.В. Зибарова, В.И. Кондаурова, С.С. Негодяева, М.В. Рыжакова, С.В. Утюжникова.

## ВВЕДЕНИЕ

Обязательным условием реализации образовательных программ подготовки специалистов высшей квалификации, ориентированных на будущую работу в сфере современной науки и наукоемких технологий, связанных с механикой жидкости и газа (МЖГ), является необходимость сочетания общетеоретических курсов по всем основным разделам МЖГ с практическим освоением обучающимся явлений и процессов, с которыми приходится встречаться в различных научных и прикладных задачах. Наиболее адекватным инструментом решения такой задачи является полномасштабный лабораторный эксперимент.

Однако при организации массового учебного процесса широкое использование экспериментальных методов и средств сопряжено с принципиальными ограничениями, связанными в первую очередь со сложностью, уникальностью и высокой стоимостью современных установок и собственно эксперимента по воспроизведению гидро- и аэродинамических процессов во всем их разнообразии.

Возможной альтернативой, предлагаемой в настоящем пособии, является образовательная технология, основанная на возможности проведения вычислительного эксперимента с использованием наукоемких пакетов прикладных программ. Сочетание в обоснованных границах широких возможностей адекватного количественного описания и визуального воспроизведения разнообразных гидро- и аэродинамических процессов позволяет обучающемуся в максимально наглядном виде и условиях, приближенных к лабораторному эксперименту, познакомиться с изучаемым явлением (процессом) и провести сопоставление с соответствующими теоретическими положениями.

В качестве исходных программных продуктов используются лицензионные отечественные учебные версии пакетов прикладных программ (ППП) Flow Vision [1] и Gas Dynamics Tool [2]. Эти пакеты в течение последних 10 лет разрабатывались коллективами специалистов (в основном выпускниками МФТИ) в области механики сплошной среды и в настоящее время получили официальное признание на рынке ППП. Учебные версии отличаются от профессиональных версий существенно меньшей ценой, они имеют коли-

чественные ограничения, не позволяющие их применять в коммерческих целях. Но при этом большая часть функциональных возможностей учебных и профессиональных пакетов практически одинакова.

Настоящее пособие подготовлено по результатам отработки предлагаемой образовательной технологии в учебном процессе при изучении различных разделов МЖГ на II и III курсах подготовки бакалавров по направлению 511600 «Прикладные математика и физика» в МФТИ.

Развитие прикладной математики и компьютерных технологий открывают новые возможности по моделированию реальных физических процессов, теоретическое описание которых в силу их сложности практически невозможно. Кроме того, использование ППП при моделировании сложных явлений и процессов, в том числе с привлечением анимационных и других мультимедийных средств, позволяет в наглядном виде познакомиться со многими деталями явления (процесса), которые не могут быть воспроизведены другими способами. Однако при этом сохраняется определяющая роль теории и лабораторного или натурного экспериментов, т. к., в конечном счете, только они могут служить мерилем правильности численного моделирования.

Авторы пособия выражают надежду, что предлагаемая образовательная технология станет существенным дополнительным инструментарием к традиционным методам и средствам (лекции, семинарские и практические занятия) изучения сложных дисциплин, к которым относится МЖГ.

Содержание пособия построено таким образом, что при выполнении конкретного задания в первую очередь необходимо внимательно изучить теоретическую часть, которая содержится в каждой главе при описании задач, или воспользоваться литературой. Затем задать граничные и начальные условия и далее проводить расчеты с возможностью визуализации изучаемого процесса. В каждом задании есть рекомендации относительно выбора как математической модели, так и граничных условий.

Если Вы решаете задачу впервые, лучше следовать указаниям в задании, а когда появится опыт работы, можете творчески подходить к заданию, выбирать другие граничные условия, проводить сравнения и делать соответствующие выводы.



Главная учебная цель работы состоит в том, чтобы при помощи ППП FV и GDT рассчитать значения искомых величин, сравнить их с теорией, объяснить различия, воспроизвести картины течений для визуального анализа и дать объяснения наблюдаемым эффектам. Недостаточно просто заполнить таблицы, необходимо оформить небольшой научный отчет с соответствующими комментариями к каждому результату.

Разработанная технология — инструмент для изучения сложных гидро- и газодинамических явлений. В используемых в пособии пакетах прикладных программ реализуется широкий спектр компьютерной визуализации: от трехмерных графических изображений до мультимедийных представлений. Освоив технологию решения задач в пределах соответствующего раздела, Вы наверняка сможете самостоятельно моделировать различные процессы и получать интересные результаты в задаче, над которой работаете.

# Р а з д е л 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧЕБНЫХ ВЕРСИЙ ППП FLOW VISION И GAS DYNAMICS TOOL

Краткая характеристика ППП Flow Vision и Gas Dynamics Tool приводится в соответствии со следующим планом.

1. Назначение и общая характеристика вычислительных возможностей ППП.
2. Набор возможных физико-математических моделей (уравнений, граничных и начальных условий).
3. Особенности построения сетки и численного метода решения уравнений.

## Г л а в а 1. ППП FLOW VISION

Учебная версия ППП Flow Vision предназначена для расчета гидро- и газодинамических задач (вместе с сопряженными процессами тепло- и массопереноса) в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Маха в произвольных трехмерных областях [1].

### § 1. Физико-математические модели

Базовыми в ППП Flow Vision являются уравнения Навье–Стокса (вместе с уравнением неразрывности). Для замыкания этих уравнений в зависимости от конкретной задачи могут использоваться дополнительные соотношения, описывающие изменение плотности, турбулентный перенос и т. п. Наборы таких соотношений в совокупности с уравнениями Навье–Стокса называются моделями. В Flow Vision наиболее полно представлены следующие модели:

- приближение Буссинеска (малые изменения плотности) для описания ламинарного течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса;
- $k$ - $\epsilon$  модель турбулентного течения вязкой жидкости с небольшими изменениями плотности при больших числах Рейнольдса;
- модель слабосжимаемой жидкости (в терминологии Flow Vision), которая позволяет рассчитывать стационарное дозвуковое течение газа при любых изменениях плотности;

- модель полностью сжимаемой жидкости (в терминологии Flow Vision): стационарное и нестационарное течение при любых числах Маха (до-, транс-, сверх- и гиперзвуковые течения).

ППП Flow Vision допускает также использование модели теплопереноса в твердом теле, сопрягаемой с переносом тепла и вещества в жидкости (газе). Кроме того, в Flow Vision включены несколько специальных моделей (напрямую не связанных с уравнениями Навье–Стокса), из которых в учебную версию пакета входят только модели свободной поверхности, двухфазного течения и одна из моделей горения.

## **§ 2. Граничные и начальные условия**

В ППП Flow Vision допускается использование широкого набора граничных условий, зависящих от конкретной модели, однако все они базируются на следующих наиболее часто встречающихся условиях на гидродинамические переменные (давления и скорости):

- условия прилипания или проскальзывания жидкости, задаваемые для вектора скорости на границах с твердыми телами;
- условия на значения давления, обычно задаваемые на границах;
- условия на значения скорости потока по нормали к границе или под углом к нормали;
- условие вытекания с нулевым градиентом давления;
- комбинации условий, перечисленных выше, например, свободное вытекание жидкости с нулевыми градиентами давления и скорости или заданные на границе значения давления и скорости.

Следует заметить, что конкретные граничные условия, как и значения параметров уравнений (плотность, вязкость, теплопроводность и т. п.), могут задаваться переменными по времени.

Начальные условия необходимо задавать при рассмотрении моделей, соответствующих нестационарным движениям. В зависимости от вида моделирующих уравнений в начальный момент времени во всех точках расчетной области задаются значения искомых функций и (или) некоторых производных от них, причем эти значения могут быть различными в разных частях области.

### § 3. Особенности численных расчетов

Для численного решения базовых уравнений в Flow Vision используется метод, основанный на консервативных схемах расчета нестационарных уравнений в частных производных, которые по сравнению с неконсервативными схемами дают решения, точно удовлетворяющие законам сохранения (в частности, уравнению неразрывности) [12]. По желанию пользователя для решения возникающей системы линейных алгебраических уравнений может использоваться как неявный (более надежный), так и явный (быстрее работающий, но расходящийся при больших шагах по времени) вариант итерационного процесса. Метод базируется на *эйлеровом* подходе к описанию движения жидкости [8], суть которого состоит в том, что различные скалярные и векторные величины рассматриваются как функции переменных Эйлера Flow V времени и координат точки в неподвижной системе координат.

В Flow Vision численное интегрирование уравнений по пространственным координатам проводится с использованием прямоугольной адаптивной локально измельченной сетки. Такой подход обеспечивает, с одной стороны, использование простой равномерной неадаптивной сетки при решении задач с относительно несложной геометрией. С другой стороны, появляется возможность при решении задач со сложной геометрией проводить адаптацию (подстройку) сетки к особенностям геометрии вблизи границ, а при решении задач с разрывными течениями адаптацию по значениям искомых функций, их градиентов и др.

Процедура локального измельчения в области адаптации предусматривает возможность последовательного деления, начиная с исходной, каждой предыдущей ячейки на 4 более мелкие ячейки (в трехмерном случае на 8) до обеспечения выполнения условия адаптации (например, достижения заданной точности вычисления градиента искомой функции).

Интерфейс Flow Vision включает возможности автоматического и ручного контроля формирования сетки, в том числе добавление/удаление ячеек сетки в определенных областях.

## Г л а в а 2. ППП GAS DYNAMICS TOOL

Учебная версия пакета Gas Dynamics Tool (далее GDT) предназначена для решения задач, связанных со сверхзвуковым течением сжимаемой многокомпонентной (допускается возникновение и исчезновение масс некоторых компонент смеси за счет химических превращений) смеси идеальных газов в двумерных или осесимметричных областях. Профессиональная версия пакета допускает моделирование течений вязкого газа [2].

### § 1. Физико-математические модели

В качестве базовых уравнений в GDT используются нестационарные уравнения Эйлера [8] относительно переменных:  $\rho u$ ,  $p + \rho u^2$ , и т. д. (уравнения Навье–Стокса в учебной версии отсутствуют). Уравнения Эйлера используются для моделирования сверхзвуковых течений идеального (в профессиональной версии — также и вязкого) сжимаемого газа. Уравнения движения (Эйлера) могут быть дополнены уравнениями конвективного переноса тепла и вещества (в учебной версии теплопроводный и диффузионный члены уравнений переноса отсутствуют), а также моделью тепловыделения.

### § 2. Граничные и начальные условия

Граничные условия в GDT соответствуют следующим четырем типам:

- условие непротекания газа на границе с твердым телом («на стенке»), которое соответствует нулевой нормальной скорости; также на стенке может быть задана нулевая тангенциальная скорость (условие прилипания);
- условие с заданными значениями всех газодинамических переменных (давлением, плотностью, компонентами вектора скорости и т. д.), которое обычно соответствует границе раздела газов;
- условие на свободной границе, которое задается в виде нулевых градиентов переменных на этой границе: значение переменной на границе берется равным значению в близлежащих ячейках расчетной области;
- условие на оси симметрии (для осесимметричных течений), которое для скорости соответствует условию непротекания, а для

остальных переменных — условию равенства значений по обе стороны границы.

При решении задач с помощью GDT задаются начальные условия на все переменные, которые могут иметь различные значения в различных подобластях расчетной области.

### **§ 3. Особенности численных расчетов**

Основным методом численного интегрирования уравнений в GDT является один из вариантов метода крупных частиц [13], имеющего второй порядок точности по координатам и первый порядок точности по времени. Метод является явным, то есть на каждом шаге по времени не требуется тратить машинное время на решение системы уравнений, однако он требует выбора достаточно малого шага по времени. Метод основан на *лагранжевом* подходе к описанию движения частиц жидкости [8], суть которого состоит в том, что величины, характеризующие движение некоторой фиксированной частицы жидкого (газового) объема (координаты, вектор скорости, плотность, давление и т. п.), рассматриваются как функции от времени и чисел, которыми отмечается «индивидуальность» рассматриваемой частицы. В качестве таких чисел используются, например, координаты жидкой частицы в некоторый начальный момент времени.

Расчетная сетка в GDT является прямоугольной и неадаптивной (неподвижной и неизмельчаемой), что обеспечивает простоту задания сетки: достаточно ввести всего 2 параметра сетки: количество ячеек сетки по двум координатным осям.

## Р а з д е л 2. РЕШЕНИЕ УЧЕБНЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА FLOW VISION

### Г л а в а 1. СОСТАВ И НАЗНАЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ МОДЕЛЕЙ ПАКЕТА

В главе рассматривается логическая структура пакета Flow Vision. Алгоритм работы с пользовательским интерфейсом Flow Vision представлен в главе 2. Здесь и далее жирным шрифтом в кавычках показываются подписи к элементам пользовательского интерфейса (к пунктам меню, узлам дерева, кнопкам, спискам и др.; например, «**Переменная**»), а в кавычках обычным шрифтом обозначаются текстовые значения, которые должны быть выбраны пользователем из списков (например, «Давление»). Курсивом показаны ключевые слова, описывающие назначение какой-либо части пакета или алгоритма работы с ним.

Как и большинство ППП для численного моделирования, пакет Flow Vision формально делится на 3 модуля, называемые *препроцессором*, *солвером* и *постпроцессором*.

#### § 1. Препроцессор

Препроцессор выполняет следующие основные функции:

- Построение *геометрической* основы задачи — расчетной области, которая формируется с помощью внешних программ (так называемых геометрических препроцессоров) и затем импортируется в Flow Vision. Следует заметить, что Flow Vision работает только с трехмерной геометрией, поэтому двумерные модели необходимо рассматривать как частный случай трехмерных.
- *Физико-математическая постановка* задачи: выбор *модели* для внутренних точек расчетной области (задание конкретного вида уравнений, значений коэффициентов), а также задание на границах расчетной области *граничных условий*, а для нестационарных задач — *начальных условий*.
- Ввод параметров расчетной сетки и численного метода для *численного* решения задачи.

*Дерево препроцессора* содержит узлы с названиями типа «**Подобласть#1**», соответствующие подобластям расчетной области. При

этом если область пространственно неодносвязна, то число их больше 1. Также в дереве препроцессора имеются узлы **«Начальная сетка»** и **«Общие параметры»**, которые служат прежде всего для ввода параметров *численного* расчета. В каждой *подобласти* допускается задание своей модели (см. ниже): например, ламинарное течение несжимаемой и сжимаемой жидкостей, турбулентное, многофазное течения и т. д.

В свою очередь узел **«Подобласть»** содержит дочерние узлы для задания граничных условий на расчетные переменные (узел **«Гр. условия»**), начальных условий во всей расчетной области (узел **«Начальные значения»**) и собственно физических параметров, определяющих коэффициенты уравнений (узел **«Вещество 0»**), а также узлы для ввода и изменения параметров численного расчета (узел **«Параметры метода»**).

## § 2. Солвер

Солвер обеспечивает численное решение поставленной задачи и как таковой «невидим» для пользователя (хотя многие его параметры задаются в препроцессоре). Работа с солвером в Flow Vision сводится к выбору пунктов меню **«Команда»** (**«Начать вычисление»**, **«Сетка & Вычисление»**, **«Остановить вычисление»**) или к нажатиям соответствующих кнопок панели инструментов. Если не считать операций создания, открытия и сохранения файла, почти вся остальная работа с пакетом (т. е. с его препроцессором и постпроцессором) возможна без использования меню и панели инструментов. Для этого в левой части окна Flow Vision расположены две вкладки **«Препроц.»** и **«Постпроц.»**, в каждой из которых находится *дерево* для показа всех элементов модели и выполнения действий с ними.

## § 3. Постпроцессор




Постпроцессор служит для *вывода* и представления, прежде всего *визуализации* полученных в результате расчетов данных. В Flow Vision используется большой набор методов визуализации, которые классифицируются по типу представляемых математических величин: скалярная величина, скалярное поле, векторное поле (скорости), а также по используемой геометрии (трехмерной или двумерной). Важно, что данные могут выводиться на любом этапе



расчета, и это позволяет отслеживать динамику моделируемого процесса.

*Дерево постпроцессора* содержит следующие узлы:

- **«Виды»** — для изменения точки зрения на трехмерное тело (проекции тела на плоскость экрана): с помощью дочерних узлов узла «Виды» можно совместить плоскость экрана с одной из плоскостей  $(x, y)$  или  $(x, z)$  или  $(y, z)$ ;
- **«Переменные»** — содержит узлы, соответствующие переменным модели (их перечень зависит от модели).
- **«Слои»** — для управления всеми графическими элементами (так называемыми «слоями визуализации», которые отображаются в правой части окна).
- **«Объекты»** — для редактирования объектов (линий, плоскостей, параллелепипедов), служащих геометрической основой слоев.

Для выполнения действий с узлами деревьев препроцессора или постпроцессора, как правило, необходимо вызывать контекстное меню, нажимая на соответствующий узел правой кнопкой мыши. Наиболее часто используется пункт **«Свойства»**, открывающий типовое окно с параметрами выделенного в дереве объекта. Для того чтобы исключить необходимость каждый раз закрывать и открывать снова окно свойств, рекомендуется «прикрепить» это окно к экрану (нажав в нем кнопку ). После ввода любой информации для ее сохранения следует нажимать кнопку  в окнах свойств и кнопку «ОК» в других диалоговых окнах. Окно свойств, возникающее для создания какого-либо узла дерева, после сохранения введенных данных следует закрывать (нажатием на кнопку  в углу окна).









## Г л а в а 2. АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПАКЕТЕ FLOW VISION



В данной главе описывается последовательность действий, необходимая для решения задач в пакете Flow Vision. Следует заметить, что первое из этих действий (см. § 1) выполняется с помощью внешней программы — геометрического препроцессора.

В качестве такого препроцессора используется пакет Solid Works, относящийся к семейству CADов (Computer-Aided Design — автоматизированное проектирование), которые получили широ-


кое распространение в современной научной и инженерной практике.

## § 1. Геометрический препроцессор (Solid Works)


1. *Создание геометрии (расчетной области)*. После запуска программы Solid Works следует нажать на кнопку «Создать»  и выбрать «Деталь». В левой части окна новой детали нужно выделить «Плоскость 1», после чего нажать на третью сверху кнопку «Эскиз»  на правой панели инструментов. Для удобства соблюдения нужных размеров целесообразно нанести масштабную сетку (0.1 м) между основными линиями посредством нажатия на вторую сверху кнопку  той же панели с последующей установкой флажка «Отображать масштабную сетку». В качестве элементов расчетной области чаще всего используются прямоугольник, линия, окружность или ее часть; они создаются соответственно с помощью кнопок «Прямоугольник» , «Линия» , «Окружность» , «Дуга через 3 точки» , находящихся на правой панели инструментов. Чтобы нарисовать сложные фигуры типа эллипса (которого нет на панели инструментов), следует выбрать пункт из меню «Инструменты/Объекты эскиза». Масштаб (размер изображения на экране) меняется либо с помощью колеса мыши, либо — после нажатия кнопки «Увеличить/уменьшить вид»  в верхней части экрана — перемещением указателя мыши вверх или вниз при нажатой левой кнопке. С помощью пункта меню «Вставка/Основание/Вытянуть...» — «ОК» начерченный замкнутый контур (прямоугольник) превращается в *трехмерное тело* (еще раз отметим, что пакет Flow Vision работает только с трехмерной геометрией). Размер по третьей координате (0.01 м) здесь менять не нужно (в плоских задачах он несущественен).





2. *Разметка границ*. Для этого следует несколько раз повторить следующую операцию: выделить какую-либо границу тела, щелкнув по ней (при этом она приобретает зеленоватый оттенок), затем нажать на кнопку «Редактировать цвет»  в середине верхней панели инструментов и выбрать один из цветов. Между этими операциями часто требуется вращать тело в пространстве, для чего используется кнопка «Вращать вид»  в правой части

верхней панели. Физически различные границы расчетной области должны быть помечены различными цветами; но все границы помечать цветом необязательно.

3. *Экспорт/импорт геометрии из Solid Works в Flow Vision.* Экспортировать созданное трехмерное тело и сохранить в формате VRML через пункт меню «**Файл/Сохранить как...**» (тип файла \*.WRL). Запустить программу Flow Vision и импортировать созданную геометрию, для чего нажать на кнопку «**Создать**» , затем указать путь к созданному в Solid Works файлу \*.WRL. После этого в правой части окна Flow Vision должно появиться изображение того же самого трехмерного тела, что и в Solid Works (только разделенное посередине плоскостью).

## § 2. Физико-математическая постановка задачи

4. *Выбор математической модели (набора уравнений).* Раскрыть дерево, щелкнув левой кнопкой мыши по узлу , затем выделить правой кнопкой узел дерева «**Подобласть#1**». В появившемся контекстном меню выбрать пункт «**Изменить модель...**», далее в открывшемся окне выбрать один из пунктов раскрывающегося списка «**Модель**» (в большинстве примеров, рассмотренных ниже, выбирается «**Ламинарная жидкость**» — так называется модель ламинарного течения несжимаемой жидкости в терминах Flow Vision [1]).

5. *Ввод физических параметров.* Через контекстное меню узла дерева «**Вещество 0**» открыть окно свойства вещества (жидкости/газа); выбрать нужные параметры (при необходимости можно пользоваться стрелками  ). Затем в верхней строчке таблицы («**Значение**») числовых значений параметров нажать кнопку , а затем либо закрыть окно свойств, либо «**прикрепить**» () его к экрану. Основными параметрами являются «**Плотность**» и «**Молекулярная вязкость**». Например, во вкладке «**Плотность**» в раскрывающемся списке «**Зависимость**» следует выбрать «**Значение +(dЗначение/dТемп)**» и установить значение 0.001 Па·с (вода).

6. *Ввод граничных условий.* В ветви дерева «**Гр. условия**» выделить соответствующую границу в дереве (при этом в правой (основной) части окна помеченная граница окрашивается в цвет, заданный ранее). Далее открыть окно редактирования граничного условия, либо через пункт контекстного меню «**Редактировать**»,

либо через кнопку «**Ed**» в окне свойств. Возможны следующие характерные комбинации типов граничных условий:

а) «**Тип границы**» — «Стенка»; «**Тип граничного условия**» — «Стенка с проскальзыванием» (обращение в нуль нормальной компоненты скорости) или «Стенка» (обращение в нуль всех компонент скорости);

б) «**Тип границы**» — «Вход/выход», «**Тип граничного условия**» — «Нормальный вход/выход» или «Давление на входе»;

в) «**Тип границы**» — «Свободный выход», «**Тип граничного условия**» — «Нулевое давление/выход».


Примечание. Для облегчения дальнейшей работы границы желательно переименовать (назвав «Стенка», «Вход», «Выход» и т.п.) либо через пункт контекстного меню «Переименовать», либо через окно свойств граничного условия.

7. Ввод начальных условий с помощью фильтра. В препроцессоре правой кнопкой мыши щелкнуть по значку «**Фильтры**», затем — «**Создать**». В раскрывающемся списке «**Объект**» выбрать «Все пространство», в списке «**Тип**» — «Установка переменной». Во вкладке «**Установить значение**» выбрать тип фильтра «Одноразовый», выбрать название переменной (например, « $x$ -скорость») и ввести значение переменной.

### § 3. Подготовка к численному моделированию

8. Построение расчетной сетки. В окне свойств объекта «**Начальная сетка**», находящейся во вкладке «**X-направление**» дерева препроцессора, следует задать число ячеек вдоль направления движения потока (50–200, в зависимости от постановки задачи, рекомендуется согласовать с преподавателем), после чего нажать на кнопку «**Равном.**» («равномерная сетка»). То же самое следует проделать с сеткой в поперечном направлении, перейдя во вкладку «**Y-направление**» в том же окне. Следует отметить, что число расчетных ячеек в этом случае может быть меньше, однако поперечный размер самой ячейки с учетом всего поперечного размера области, как правило, должен быть меньше. Во вкладке «**Z-направление**» никаких действий предпринимать не нужно, поскольку рассматривается двумерная задача.




В случаях, когда требуется сгустить сетку, в некоторых частях расчетной области следует произвести визуализацию расчет-

ной сетки, для чего необходимо нажать соответствующую кнопку в окне свойств сетки . Для добавления дополнительных линий сетки следует выделить в окне свойств соседнюю с добавляемой линией (вертикальную во вкладке «**X-направление**» или горизонтальную во вкладке «**Y-направление**»). При этом добавленная линия выделяется красным цветом. После этого следует нажать кнопку «**Вставить**».

9. *Ввод параметров численного расчета* осуществляется с помощью вкладки «**Шаги**» в окне свойств узла дерева препроцессора «**Общие параметры**». При этом, как правило, параметры адаптации сетки: узел дерева «**Адаптация**», параметры численного метода — узел «**Параметры метода**» — изменять не требуется. Основные параметры расчета — «**Макс. шаг**» и «**CFL**» («**неявный CFL**», расположенный слева от «**Макс. шаг**») — определяют выбор программой расчетного шага по времени. CFL — это т. н. число Куранта; его физический смысл можно трактовать как максимальное число ячеек сетки, которое малый объем жидкости может преодолеть за один шаг по времени. По умолчанию  $CFL = 1$ , и в этом случае объем смещается по времени не более чем на одну ячейку. Однако для повышения скорости расчета можно задавать другие значения CFL (по согласованию с преподавателем).

Параметр «**Макс. шаг**» обладает большим приоритетом, чем CFL, поэтому управлять шагом по времени рекомендуется именно через этот параметр. При выборе шага по времени стоит предварительно оценивать характерное время течения через одну ячейку  $\tau$ :  $\tau \sim L/(N \cdot u)$ , где  $L$  — размер области в направлении течения,  $N$  — число расчетных ячеек в этом направлении,  $u$  — характерная скорость течения. При выбранном расчетном шаге по времени, значительно большем  $\tau$  (более чем на 2 порядка), точность решения окажется низкой или численное решение задачи не будет соответствовать физическому смыслу: значения искомых величин в разных расчетных точках будут различаться на много порядков (это называется расходящимся решением). С другой стороны, при шаге по времени, существенно меньшим  $\tau$ , численное решение будет хорошо сходиться к точному (например, аналитическому) решению, однако для его получения потребуется слишком много расчетного времени (что является неоправданным в условиях ограниченности времени занятий).

## § 4. Моделирование с помощью солвера


10. *Расчет задачи* выполняется нажатием кнопки  (в первый раз) или кнопки . В процессе расчетов следует обращать внимание на нижнюю часть окна Flow Vision, где отображаются текущее время, шаг по времени и (в столбце «Погрешность») максимальные погрешности в вычислении давлений и скоростей. В корректном расчете эти погрешности не должны превышать 0.01 (1%). Следует отметить, эта погрешность относится к одному шагу по времени и имеет лишь косвенное отношение к точности получаемого конечного решения. Расчет прекращается нажатием кнопки .

Чтобы начать работу с препроцессором, желательно, чтобы перед этим все переменные получили свои характерные значения, не противоречащие физическому смыслу задачи; для этого следует провести предварительный тестовый расчет (3–10 шагов по времени). Если этого не сделать, многие максимальные и минимальные значения параметров в постпроцессоре (например, на осях графиков) придется вводить вручную. Окончательный расчет проводится после настройки параметров постпроцессора (см. ниже). При этом расчет стационарных задач следует завершать, когда течение можно считать установившимся (визуальная картина полученного течения остается постоянной, а значения параметров меняются со временем «достаточно мало»). Более точные способы оценки момента остановки расчета базируются на анализе динамики интегральных характеристик (см. § 7), которую можно считать экспоненциальной:  $y = A + B \exp(-at)$ . Например, отношение первой и второй производной какой-либо характеристики по времени  $(-\frac{y''}{y'} = -\frac{2}{\tau} \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{y_{n+1} - y_{n-1}})$  дает показатель экспоненты  $a$ , из которого можно оценить необходимое время расчета:  $t = -\ln \varepsilon / a$ , где  $\varepsilon$  — необходимая точность решения.

11. *Возвращение расчета в начальное состояние*, как правило, необходимо проводить после исправления существенных ошибок в данных, введенных в препроцессор: такие ошибки могут проявляться в сообщениях об ошибках, например, в виде очень больших (“1e+10”) погрешностях или в принципиально неверном характере наблюдаемого течения. Для возвращения к началу в окне

свойств узла дерева препроцессора «**Общие параметры**» во вкладке «**Старт**» необходимо снять флажок «Продолжать вычисление», а во вкладке «**Время**» ввести значение 0 в поле «Сейчас». При проведении расчетов следует учитывать также, что рассчитываемые переменные сохраняются в файле **Flow Vision**: в процессе расчетов сохраняются каждые  $N$  шагов по времени, где  $N$  по умолчанию равно 50 и может быть изменено в поле «Частота автосохранения/По итерациям» той же вкладки «**Время**».

## § 5. Подготовка к визуализации результатов

12. *Работа в постпроцессоре* начинается с перехода во вкладку «**Постпроц**» левой части окна. В окне нужно раскрыть дерево () до узла «**Объекты**» включительно.


13. *Создание (объекта) плоскости*. В дереве постпроцессора из контекстного меню узла «**Объекты**» (или любого объекта, например, «**Шаблон плоскости**») выбирается пункт «**Создать объект**»; в появившемся окне в качестве типа объекта задается «**Шаблон плоскости**». Если создается основная плоскость (совпадающая с плоскостью течения), то нормальный вектор к ней нужно задать как  $(0,0,1)$ , а также выставить флажок «**Отсекающая плоскость**».


14. *Создание (объекта) линии*. Из контекстного меню узла «**Объекты**» выбирается пункт «**Создать объект**»; далее в появившемся окне в качестве типа объекта необходимо выбрать «**Шаблон линии**». Для горизонтальных линий («нормальный») вектор, задающий направление линии, имеет компоненты  $(1, 0, 0)$ , а для вертикальных —  $(0, 1, 0)$ ; кроме того, положение линии определяется координатами точки «**Источник прямой**».

## § 6. Визуализация скалярных полей

15. *Изображение распределения переменной в плоскости методом цветовой (тоновой) заливки*. Из контекстного меню основной плоскости задачи необходимо выбрать пункт «**Создать слой**»; в раскрывающемся списке «**Переменная**» — задать переменную для показа цветами (например, «Давление» или «Модуль Скорости»), в списке «**Метод**» — «Заливка». Если необходимо изменить соответствие между цветами и значениями переменной, то

во вкладке **«Покрытие»** после изменения значений **«Макс»** и **«Мин»** следует нажать кнопку **«Переопределить цвета»**.

16. *Создание двумерного графика.* Из контекстного меню соответствующего объекта-линии (вдоль этой линии будет располагаться ось  $x$  графика), выбрать пункт **«Создать слой»**; в раскрываемом списке **«Переменная»** — задать переменную для показа вдоль оси  $y$  (например, **«Давление»** или **«Модуль Скорости»**), в списке **«Метод»** — **«Двумерный график»**, после чего убрать флажок **«Авто»** напротив слова **«Ориентация»**. Если после применения изменений () график не виден (или его ось  $y$  направлена не в ту сторону), то следует изменить угол ориентации графика с нуля на 90, 180 или 270 градусов. Если же ось  $x$  направлена в противоположную сторону, то нужно поменять на противоположное направление нормального вектора того объекта-линии, на котором построен график. Для того чтобы ось  $x$  графика занимала полностью отрезок пересечения этой линии с расчетной областью, нужно перенести начальную точку («источник прямой») линии (начало координат графика совпадает с ней).


17. *Создание «графика вдоль кривой».* Редактируя свойства плоскости, совпадающей с плоскостью течения, следует перенести ее начальную точку в начало кривой, вдоль которой будет строиться график, например, в начало образующей цилиндра. После этого из контекстного меню построенной плоскости выбирается **«Создать слой»**, в раскрываемом списке **«Переменная»** указывается скалярная переменная (например, **« $x$ -скорость»**), в списке **«Метод»** — **«график вдоль кривой»**. Далее следует применить изменения () , и если график оказался не в том месте, где ожидалось, то выбрать другой пункт списка, расположенного во вкладке **«Кривая»**. Остальные свойства графика вдоль кривой изменяются так же, как и для обычного графика (см. п. 16).

18. *Создание графика теоретической зависимости методом введения новой переменной.* Чтобы сравнить графики результатов расчета с теорией, рекомендуется построить на той же (прямой или кривой) линии график зависимости переменной от координат(ы). Для этого нужно из контекстного меню узла **«Переменные»** выбрать пункт **«Создать скаляр»**, и в появившемся окне ввести имя переменной и ее зависимость от  $x$  и/или  $y$  (используя скобки, арифметические операции и функции: их список называет-



ся «**Операции**» и расположен в нижней части окна). После введения такой переменной ее график строится точно так же, как и график расчетной переменной (см. п. 16).

## § 7. Визуализация отдельных числовых значений

19. *Вычисление интегральных характеристик (осредненных по сечению значений переменных)*. Из контекстного меню соответствующего объекта-плоскости (как правило, перпендикулярной течению) выбрать пункт «**Создать слой**»; в раскрывающемся списке «**Переменная**» задать переменную для показа (чаще всего, «Давление»), в списке «**Метод**» — «Характеристики». Для просмотра значений характеристик необходимо открыть и «прикрепить» () информационное окно с таблицей, выделив слой в дереве и нажав на кнопку панели инструментов **i** (или выбрав пункт меню «**Вид/Открыть инфо-окно**»). По умолчанию характеристики являются интегральными, то есть они получаются усреднением переменных по сечению плоскости, указанной при создании данного слоя. Чтобы записать таблицу характеристик в файл, во вкладке «**Сохранение в файл**» следует отметить флажок «**Записывать данные в файл**» и задать имя файла (можно также выбрать путь к нему). В процессе расчетов в файл будут записываться изменения характеристик во времени.

20. *Фиксация значений переменных в точке методом характеристик*. Создать слой характеристик, как описано в пункте 19. Чтобы показать только значение одной переменной в одной точке, во вкладке «**Характеристики**» окна свойств созданного слоя в расположенном справа переключателе нужно выбрать вариант «Точечные». Значение переменной в точке, изменяющееся во времени, удобно сохранять в файл; для этого во вкладке «**Сохранение в файл**» следует отметить флажок «**Записывать данные в файл**» и задать имя файла.

21. *Вычисление сил и моментов, действующих на объект*.

Во-первых, в Solid Works объект, например **Цилиндр**, следует закрасивать в *иной цвет*, нежели остальные границы, что обеспечивает автоматическое задание необходимых граничных условий.

Во-вторых, на сформированных граничных условиях необходимо выбрать пункт контекстного меню «**Создать супергруп-**

пу», что приведет к появлению в дереве препроцессора объекта («супергруппы»), например, под названием «Цилиндр группы», если граничное условие называлось «Цилиндр».

В-третьих, следует из контекстного меню этого объекта выбрать пункт «Экспортировать», что приведет к появлению в дереве постпроцессора объекта «От цилиндра группы», который и используется для построения требуемого слоя. На объекте «От цилиндра группы» необходимо создать слой характеристик («переменная» — «Давление», «метод» — «Характеристики»). Чтобы вывести значения, соответствующие силам, давлениям и т. д., нужно выделить созданный слой «Характеристики давления» в дереве постпроцессора, а затем нажать на кнопку панели инструментов **і** (или выбрать пункт меню «Вид/Открыть инфо-окно»).

## § 8. Визуализация векторного поля скорости

22. *Построение направлений скорости методом векторов.* Из контекстного меню основной плоскости задачи необходимо выбрать пункт «Создать слой»; в раскрывающемся списке «Переменная» задать «Скорость», в списке «Метод» — «Векторы». Во вкладке «Начальные точки» рекомендуется уменьшить число точек, из которых будут выходить векторы, (параметр «Частота узлов по **i**-му орту») до 30–80. Если слой будет просматриваться в отсутствие слоя «Заливка» (см. п.15), то лучше оставить без изменений цвета векторов, которые по умолчанию соответствуют значениям модуля скорости. В противном случае рекомендуется изменить цвет векторов на черный или белый, выбрав во вкладке «Покрытие» из списка «Переменная» какую-либо константную переменную (например, «Плотность») и дважды щелкнув на верхней (красной) строке цветовой палитры для изменения цвета.


23. *Построение линий тока методом группы частиц.* Эта процедура позволяет воспроизвести анимационную картинку движения частиц со скоростью жидкости, которые, как известно, оставляют после себя следы, совпадающие с линиями тока.

Из контекстного меню основной плоскости задачи необходимо выбрать пункт «Создать слой»; в раскрывающемся списке «Переменная» задать «Скорость», в списке «Метод» — «Группа частиц». Во вкладке «Начальные точки» рекомендуется уменьшить число точек, из которых будут выходить линии тока, (пара-

метр «**Частота узлов**») до 30–80 по каждому орту; во вкладке «**Частицы**» уменьшить «**Число шагов**» до 20–100 (это определяет длину следа от частицы). Цвет частиц рекомендуется сделать *черным* или *белым*, чтобы они были видны во всей области даже при наличии слоя «Заливка».

## § 9. Представление результатов и подготовка отчета

24. *Отчет о проделанной работе* рекомендуется оформлять с использованием текстового редактора Microsoft Word. По любой задаче, решенной с помощью пакета Flow Vision, в отчете представляется следующий набор результатов:

- Картина течения с распределением значений скорости или давления (слой визуализации «Заливка» — рисунок в формате \*.bmp) и соответствующие комментарии. Рисунок в формате \*.bmp можно получить, не выходя из пакета Flow Vision, воспользовавшись кнопкой «**Захватить графическое окно**» . Альтернативным вариантом может являться использование клавиши Print Screen или внешней программы, захватывающей изображение в выделенной части экрана, при этом картинку можно переносить в Word не через файлы, а через буфер обмена Windows.
- Картина течения с линиями тока (слой визуализации «Группа частиц» или «Векторы» — рисунок) и соответствующие пояснения.
- Полученные в результате расчета интегральные характеристики, например, сила сопротивления или потеря полного давления, которые должны быть представлены в сравнении с теорией (таблица, содержащая информацию о граничных, начальных условиях, результаты численного расчета и теории). Объяснения совпадения или расхождения численного эксперимента с теорией или экспериментом.
- Картина течения с двумерными графиками, полученными в ходе расчетов (слой визуализации «Двумерный график» — рисунок), и соответствующие комментарии или график, построенный в другом математическом или графическом пакете на основе файлов, полученных в результате сохранения динамики изменения значений каких-либо переменных.

# Глава 3. ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОМ ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

## § 1. Основные соотношения

Для описания движения вязкой жидкости в качестве базовых уравнений используются уравнения Навье–Стокса, которые в векторной форме имеют вид [8]

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \cdot \Delta \vec{U}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{U} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь:  $\vec{U}$  — вектор скорости,  $\vec{F}$  — вектор массовой силы, отнесенной к единице массы,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  — коэффициент кинематической вязкости ( $\mu$  — коэффициент динамической вязкости). В отсутствие массовых сил и при  $\rho = \text{const}$  уравнения (3.1) и (3.2) записываются в виде

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \cdot \Delta \vec{U}, \quad (3.2)$$

$$\text{div} \vec{U} = 0. \quad (3.3)$$

Картина изучаемого течения в установившемся режиме показана на рис. 3.1. Движение вязкой жидкости между двумя плоскостями  $y = \pm h$  можно представить как предельный случай течения в канале прямоугольного сечения при условии, если одну сторону прямоугольника принять равной  $2h$ , а другую устремить к бесконечности. В этом смысле рассматриваемое течение может быть названо течением в «плоской трубе». Для рассматриваемой модели от нуля отлична только компонента вектора скорости  $\vec{U}$  вдоль оси  $x$ , которую будем обозначать  $u$ .

Для стационарного случая и при  $\mu = \text{const}$  из (3.2) и (3.3) получим [4]

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.4a)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3.4б)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.4в)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.4г)$$

Из последнего уравнения следует, что скорость потока в канале зависит только от  $y$  и  $z$ , а из уравнений (3.4а) и (3.4б), что давление зависит только от  $x$ . Удобно ввести обозначение

$$\frac{dp}{dx} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}, \quad (3.5)$$

где  $\Delta p$  — постоянный вдоль оси  $x$  перепад давления на произвольно выбранном участке длиной  $l$ . Очевидно, что задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\mu \cdot l}. \quad (3.6)$$

Если в качестве граничных условий рассматривать условие прилипания на стенках канала:  $u = 0$  при  $y = \pm h$ , то решение (3.6) принимает следующий вид:

$$u = \frac{\Delta p h^2}{2\mu l} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Таким образом, в стационарном случае поперечный профиль скорости вдоль оси канала описывается параболой, при этом максимальное значение скорости равно

$$u_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p h^2}{\mu l}. \quad (3.8)$$

Важной характеристикой рассматриваемого течения является секундный объемный расход  $Q$ , отнесенный к единице длины в направлении оси  $z$ , перпендикулярном к плоскости  $(x, y)$ :

$$Q = \int_{-h}^h u dy = \frac{2}{3} \frac{\Delta p \cdot h^3}{\mu \cdot l}. \quad (3.9)$$

Из (3.9.) можно определить среднюю по сечению скорость:

$$u_{\text{cp}} = \frac{Q}{2h} = \frac{1}{3} \frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu \cdot l} = \frac{2}{3} u_{\text{max}}. \quad (3.10)$$

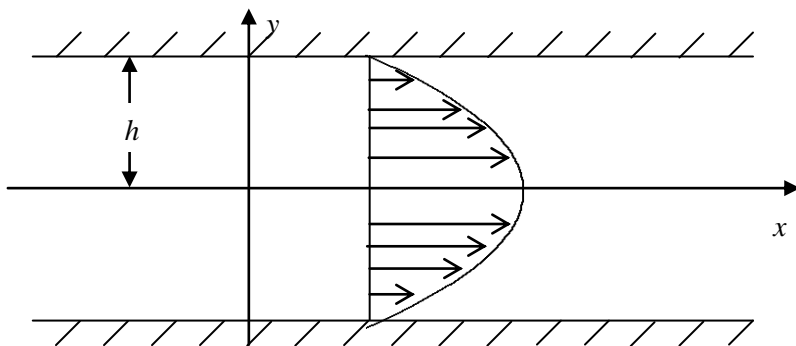


Рис. 2.1. Установившееся ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости между параллельными плоскостями

Следует подчеркнуть важное следствие приведенных теоретических формул: при заданном перепаде давления на участке плоского канала выбранной длины расход пропорционален кубу расстояний между плоскостями, т. е. резко падает с уменьшением этого расстояния и, наоборот, резко возрастает с его увеличением. Если задаться необходимым расходом, то необходимый для его обеспечения перепад давлений, приводящий жидкость в движение, будет меняться обратно пропорционально кубу ширины щели между плоскостями. При переходе к трубе круглого сечения расход пропорционален четвертой степени диаметра трубы [4].

## § 2. Постановка задачи

Задача состоит в моделировании плоского ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, наблюдении за динамикой его установления и анализе установившегося течения (которое является аналогом известного течения Пуазейля в прямой круглой трубе).

**Условие задачи.** Вязкая несжимаемая жидкость течет между двумя плоскостями, находящимися на расстоянии  $2h$ . Течение принимает свою окончательную форму (установившейся, стацио-

нарный режим) не сразу: после определенного разгона на протяжении некоторого промежутка времени. В установившемся режиме профиль скорости становится параболическим лишь на некотором расстоянии от начала канала.


**Целью** работы является нахождение профиля скорости и границ применимости теоретического расчета (формула (3.7)). Полученный в численном эксперименте профиль необходимо сравнить с параболическим, а границы применимости — с эмпирической оценкой [3].

### § 3. Задание

При выполнении задания следует обращаться к подсказкам из главы 2, номера которых заключены в фигурные скобки { }.

Примечание. В электронной версии учебного пособия подсказками можно пользоваться следующим образом: удерживая клавишу *Ctrl*, щелкнуть левой кнопкой мыши по цифре, заключенной в фигурные скобки, прочитать подсказку, которая совпадает с соответствующим номером абзаца в главе 2, затем вернуться назад (например, через *Shift+F5*) и продолжить выполнять задание.

1. Создать геометрическую основу задачи: плоский канал {1}.

- Нарисовать плоский прямоугольник: С помощью кнопки «Линия» нарисовать прямоугольник так, чтобы начало координат  находилось в левом нижнем углу создаваемого прямоугольника. В приведенном ниже варианте размер канала задается равным 4×30 см: в силу симметрии строится только его половина.

- Задать границы. В данном примере различают четыре типа грани: верхняя, правая, левая грани и остальные {2}.

- Экспортировать/импортировать созданное тело {3}:

2. Выбрать расчетную модель. В данной задаче решаются уравнения Навье–Стокса для ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости — воды {4}.

3. Ввести физические параметры, плотность — 1000 кг/м<sup>3</sup> и вязкость («Молекулярная вязкость») — 10<sup>-3</sup> Па·с {5}.

4. Ввести граничные условия. На передней, задней и нижней грани ставится условие «Стенки с проскальзыванием», на верхней грани — условие «Стенки» (без проскальзывания), на правой грани (у выхода из канала) — условие свободного вытекания с нулевым

давлением (тип границы — «Свободный выход», тип граничного условия — «Нулевое давление/Выход»). На левой грани (у входа в канал) тип границы — «Вход/Выход»; при этом сначала следует ставить граничное условие с заданным давлением (0.005 Па), а другой расчет можно провести с заданной скоростью (0.001 м/с) {6}.

5. Специальных начальных условий в данной задаче не ставится в связи с необходимостью проследить процесс установления течения. По умолчанию во всей расчетной области в начальный момент времени предполагается нулевая скорость и нулевое давление.

6. Создать расчетную сетку: в целях экономии машинных ресурсов. В рассматриваемой задаче рекомендуется создать следующую расчетную сетку: число ячеек в горизонтальном направлении — 30–100, в вертикальном — 20–60. Параметры численного метода в данной задаче изменять не требуется {8}.

7. Настроить работу постпроцессора {12}:

а) создать плоскость (плоскость расчета) {13},

б) создать горизонтальную линию на оси канала (у нижней границы: «Источник прямой»:  $x_0 = 0.005$ ,  $y_0 = 0.001$ ,  $z_0 = 0.005$ ) {14},

в) создать 3 вертикальных линии на разном расстоянии от входа в канал. Для варианта, приведенного ниже, линии находились на расстоянии 5, 15, 25 см от начала канала («Источник прямой»:  $x_0 = 5$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0.005$ ),

г) на каждой линии {16} построить двумерный график (график давления на горизонтальной линии и график X-компоненты скорости на вертикальных линиях). Для каждого графика на вертикальных линиях нужно выбрать одинаковую длину оси «Функция» 0.05 (в данном случае) и, возможно, изменить ориентацию плоскости «Функция» на 90 или 270 градусов.

8. Отобразить распределение скорости в канале {15}.

9. Для ускорения расчета в разделе «Общие параметры» во вкладке «Шаги» можно задать «Макс. шаг» = 10, CFL = 100 {9}.

10. Выполнить предварительный и окончательный расчет задачи {10}.

11. Представить отчет о проделанной работе {24}, в который включить следующую таблицу:



**Результаты расчета скорости и длины установления течения**

$u_{\max e}$	$u_{\max t}$	$L_e$	$L_t$

Здесь введены следующие обозначения:

$u_{\max e}$  — максимальная скорость, найденная в численном эксперименте;  $u_{\max t}$  — максимальная скорость, рассчитанная по формуле (3.8.);  $L_e$  — длина установления течения из численного эксперимента;  $L_t$  — длина установления, полученная из оценки  $0.03 \operatorname{Re} \cdot 2h$  [3].

**§ 4. Представление и анализ результатов**

1. Сравнить значения максимальной и средней скорости в различных сечениях с их теоретическими значениями при граничных условиях на скорость (равномерный профиль скорости на входе в канал). Объяснить расхождение.
2. Для определения границ применимости теоретического решения необходимо найти время и длину (расстояние от входа в канал до сечения канала, в котором профиль становится параболическим) установления. Если профиль все еще нельзя считать параболическим (на основании визуальной оценки) даже на выходе из канала, следует уменьшить скорость течения на входе в канал. Рекомендуется произвести качественное сравнение полученной таким образом *длины установления* с эмпирической оценкой  $0.03 \cdot \operatorname{Re} \cdot 2h$  [3], где  $h$  — поперечный размер канала, а  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса:  $\operatorname{Re} = \rho u h / \mu$ . Для более точного сравнения рассчитанного профиля с теоретическим (параболой) рекомендуется применить обработку и визуализацию выходных данных расчета в математическом пакете, например, в Mathcad (см. рис. 2.2, 2.3). Для этого необходимо предусмотреть, чтобы слои визуализации Flow Vision, соответствующие профилям скорости в нескольких сечениях канала, периодически сохранялись в текстовые файлы (см. {19}). Более простой альтернативой использованию внешней программы типа Mathcad при сравнении полученного профиля течения с теорией является построение графика квадратичной функции с помощью средств постпроцессора Flow Vision (см. {18} и рис. 2.4).

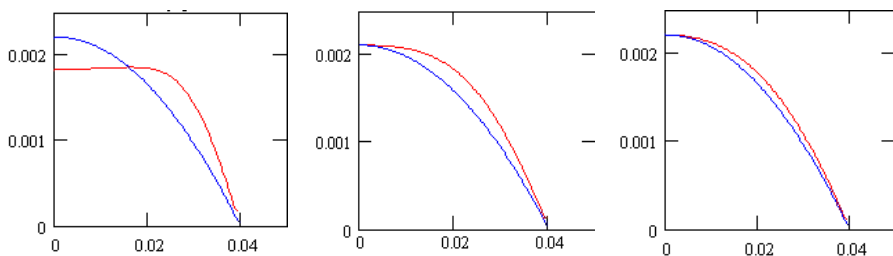


Рис. 2.2. Установившиеся профили скорости на расстоянии 5, 15 и 25 см от входа при заданной скорости на входе  $u_{cp} = 1.5$  мм/с

Рис. 2.3. Динамика установления профиля скорости (в сечении  $x = 25$  см) при заданной скорости на входе в канал  $u_{cp} = 1.5$  мм/с

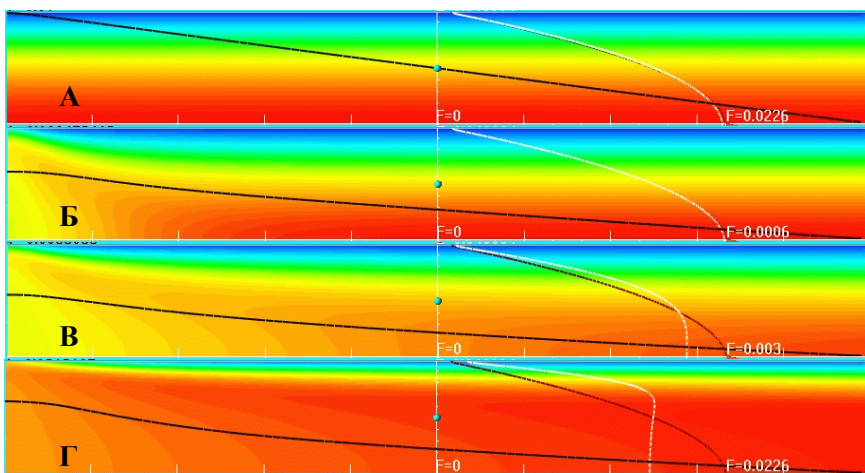
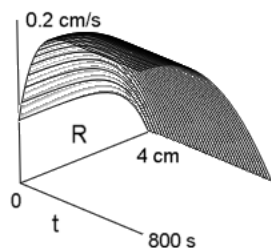


Рис. 2.4. Распределение скорости по каналу в случае граничных условий на разность давлений (А) и на скорость (Б-Г: 0.4 мм/с, 2 мм/с, 1.5 мм/с, равномерный профиль на входе). Белой линией показан расчетный профиль скорости, коричневой — параболический профиль, черной линией — давление на оси канала

3. Сравнить с теорией значение средней скорости в каком-либо сечении, когда в качестве граничных условий используется разность давлений на входе и выходе из канала.

## Г л а в а 4. ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

### § 1. Основные соотношения

Данная задача посвящена хорошо изученному теоретически и экспериментально течению: обтеканию цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью в разных режимах. Рассмотрим основные приближения, которые в классической механике жидкости и газа используются для теоретического вывода величины силы сопротивления при медленном движении сферы и цилиндра. Эти приближения называются соответственно *приближениями Стокса и Осена* [8].

Уравнение Навье–Стокса в безразмерном виде:

$$S \operatorname{Re} \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{Re}(U, \nabla)U = -\operatorname{Re} E \nabla P + \frac{\operatorname{Re}}{Fr} F + \Delta U, \quad (4.1)$$

где  $\operatorname{Re} = \frac{\rho U a}{\mu}$ ,  $S = \frac{L}{UT}$ ,  $Fr = \frac{U^2}{gL}$ ,  $E = \frac{P}{\rho U^2}$  — соответственно числа Рейнольдса, Струхала, Фруда и Эйлера,  $U$ ,  $P$ ,  $F$  — безразмерные скорость, давление, потенциальная сила,  $a$ ,  $t$ ,  $\nabla$ , и  $\Delta$  — соответственно безразмерные время и операторы дифференцирования по пространственным переменным.

При малых числах Рейнольдса ( $\operatorname{Re} \ll 1$ ) уравнения (4.1) заметно упрощаются. Впервые задача о медленном движении *сферы* в вязкой жидкости была решена Стоксом в 1851 году в предположениях что:

- внешняя сила отсутствует, т. е.  $F = 0$ ;
- движение стационарное;
- $\operatorname{Re} \cdot E \approx 1$ .

При этих предположениях уравнения преобразуются к виду

$$\mu \Delta U - \operatorname{grad} P = 0; \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} U = 0. \quad (4.3)$$

При рассмотрении обтекания покоящейся сферы радиуса  $a$ , центр которой находится в начале сферической системы координат, потоком жидкости, имеющим на бесконечности скорость  $U$ , необходимо задать следующие граничные условия соответственно на поверхности сферы и на бесконечности:

$$\begin{aligned} r = a, \quad u = v = w = 0, \\ r = \infty, \quad u \rightarrow U, v \rightarrow 0, w \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Одним из важных результатов теоретического решения рассматриваемой задачи является формула для силы сопротивления движению сферы в вязкой жидкости, приложенной к сфере со стороны жидкости:

$$F = 6\pi a U \mu. \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) получило название *формулы Стокса*.

Решение Стокса оказывается практически пригодным при очень малых значениях числа  $Re$ . Это следует из того, что при переходе от уравнений (4.1) к уравнениям (4.2) были отброшены инерционные члены (второе слагаемое в левой части уравнения (4.1) по сравнению с членами, характеризующим силы трения. Очевидно, что на больших расстояниях от сферы такая оценка является неверной [5].

В 1910 году немецкий физик Осеен (Oseen C.W. *Hydrodynamie* — Leipzig: Akad. Verlag, 1927) показал, что гораздо лучшие результаты получаются, если в уравнениях движения отбрасывать не все инерционные члены. Уточненная формула для силы сопротивления сферы в приближении Осеена:

$$F = 6\pi a U \mu \left( 1 + \frac{3}{8} Re + \frac{9}{40} Re^2 \ln Re + \dots \right), \quad Re \ll 1. \quad (4.6)$$

Осеен рассматривал задачу об обтекании *бесконечного цилиндра* жидкостью, движущейся в поперечном к цилиндру направлении. При этом из основных уравнений (4.2) при замене  $u = U + u'$ ;  $v = v'$ ;  $w = w'$  получаются уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} U \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

которые получили название *уравнений Осеена*.

Отнесенная к единице длины сила сопротивления при обтекании цилиндра оказывается равной

$$F = \frac{4\pi\mu U}{\ln(3.7/\text{Re})}; \quad \text{Re} \ll 1. \quad (4.8)$$

Сопротивление, испытываемое цилиндром при  $\text{Re} \gg 1$  [8]:

$$F = 0.48\rho U^2 a. \quad (4.9)$$

## § 2. Постановка задачи

Задача состоит в моделировании с помощью пакета Flow Vision обтекания цилиндра (ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в прямом канале), включая наблюдение за динамикой его установления и анализ установившегося течения.

**Условие задачи.** Круглый цилиндр бесконечной длины, образующие которого перпендикулярны плоскости течения, помещен в несжимаемую вязкую жидкость. Скорость жидкости на большом расстоянии от цилиндра —  $U$ . Для приведения в соответствие с теорией (4.8) результаты расчетов для сил сопротивления следует делить на длину цилиндра.

Основными **целями работы** являются:

1. Получение картины установившегося вихревого течения при различных числах Рейнольдса и сравнение результатов моделирования с известными из экспериментов изображениями из альбома течений Ван-Дайка [9].

2. Вычисление силы сопротивления, действующей на цилиндр, и сравнение расчетного значения с теоретическими данными для двух предельных случаев:  $Re \ll 1$  и  $Re \gg 1$ .

### § 3. Задание

1. Создать геометрическую основу задачи: плоский канал, т. е. прямоугольник (размеры прямоугольника —  $0.12 \times 0.3$  м), внутрь канала помещен цилиндр (радиус  $r = 0.02$  м). Ось цилиндра располагается перпендикулярно плоскости течения (рис. 2.5). Размер по третьей координате ( $0.01$  м) менять не нужно {1}.
2. Задать границы. В данном примере различают четыре типа границы: цилиндр, правая, левая грани и остальные {2}.
3. Экспортировать созданное трехмерное тело {3}.
4. Выбрать расчетную модель, состоящую из набора уравнений. В данной задаче решаются уравнения Навье–Стокса для ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости {4}.
5. Ввести физические свойства воды: плотность —  $1000 \text{ кг/м}^3$  и вязкость —  $10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$  {5}.
6. Ввести граничные условия. На цилиндре следует поставить граничное условие «Стенка без проскальзывания», в то время как на верхней, нижней, передней и задней грани стенки канала — условие «Стенка» (без прилипания). На левой грани параллелепипеда задать скорость втекания («Нормальный вход/выход») равной  $0.00015 \text{ м/с}$  (что при данной геометрии соответствует  $Re = 6$ ); на правой границе — условие «Свободный выход/Нулевое давление». Для удобства лучше переименовать граничные условия, чтобы потом легко было их изменить и провести новый расчет {6}.
7. Создать расчетную сетку. В данной задаче следует создавать следующую сетку: число ячеек в горизонтальном направлении — 100, в вертикальном — 50. В области нахождения цилиндра сгустить сетку {8}.
8. Настроить работу постпроцессора, для чего создать следующие объекты:
  - а) создать плоскость (совпадающая с плоскостью расчета) {13},
  - б) на плоскости создать слои визуализации, соответствующие распределению скоростей и давлений {15}.
9. Получить интегральные характеристики (силы, моменты, действующие на цилиндр) {21}.

10. Произвести расчет задачи, в процессе которого необходимо следить за изменениями картины течения. Расчет остановить, когда течение можно считать установившимся {10}. Для ускорения расчетов в данной задаче рекомендуется в окне свойств «Общие параметры» (препроцессор) во вкладке «Шаги» задать «Макс. шаг» = 10, CFL = 100 {10}.
11. Создать слой визуализации с помощью группы частиц {23}; проанализировать структуру полученной картины течения и в случае появления области завихренности качественно оценить ее размер.
12. Представить отчет о проделанной работе {24}, в который включить следующую таблицу:

Т а б л и ц а 2.2

**Результаты расчета и сравнение с теорией силы сопротивления, испытываемой цилиндром**

Re	U	F	F <sub>p</sub>	F <sub>v</sub>	$\frac{F_p}{F}$	$\frac{F_\gamma}{F}$	z	F <sub>t</sub>

Здесь введены следующие обозначения:

Re — число Рейнольдса,

U — скорость потока, заданная на границе,

F — сила сопротивления, испытываемая цилиндром («Сила с Трением X»),

$\frac{F_p}{F}$  — доля силы сопротивления за счет сил давления,

$\frac{F_\gamma}{F}$  — доля силы сопротивления за счет вязких сил,

z — размер возвратной зоны,

F<sub>t</sub> — сила сопротивления, испытываемая цилиндром, рассчитанная теоретически.

#### § 4. Представление результатов

1. Сравнить и объяснить различия в картинах течений при различных числах Рейнольдса, например, Re = 0.5, 30, 200 (задаются

соответствующими скоростями на границе). Для чисел  $Re = 9.6, 13.1, 26, 30.2$  полученные картины течения сравнить с классическими экспериментальными данными, представленными в альбоме Ван-Дайка [9].

2. Определить силы, действующие на цилиндр. При больших числах Рейнольдса оценить вклад сил давления (Сила  $X$ ) и вязких сил в силе сопротивления (Сила с трением  $X$ ), а также размер возвратной зоны по сравнению с диаметром цилиндра.

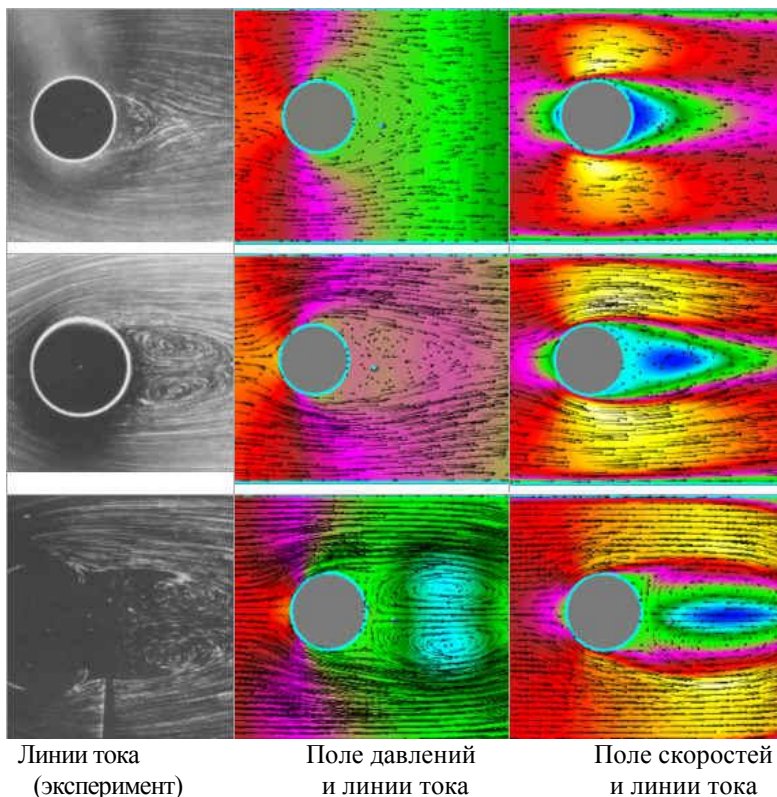


Рис. 2.5. Обтекание цилиндра при различных числах Рейнольдса ( $Re = 13.1; 26; 30.2$  сверху вниз соответственно) и образование вихрей

3. Помимо рассмотренных выше форм представления данных с помощью препроцессора (двумерные графики и закраска плоско-



сти) в данной задаче могут быть эффективно применены анимационные формы: «частицы» и «кометы», движущиеся в потоке с оставлением следа («кометы» показаны на рис. 2.5; видно, что они легко сравнимы с линиями тока, получаемыми экспериментально и теоретически).

Результаты расчета сравниваются с картинами течения из альбома течений жидкости и газа [9].

Приведем качественное объяснение формирования различных режимов течения в зависимости от числа  $Re$ .

При малых числах Рейнольдса ( $Re < 1$ ) обтекание цилиндра является ламинарным. Начиная со значения  $Re = 1$  и вплоть до  $Re \sim 40$ , происходит нарушение устойчивости ламинарного потока. Новый тип развитого вихревого течения формируется при  $Re > 10$ . При этом за обтекаемым телом образуются два вихря, однако течение остается стационарным и ламинарным.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса ( $Re > 40$ ) описанное выше стационарное движение с образованием в задней области течения системы из двух симметричных вихрей теряет устойчивость. При этом один из вихрей удлиняется, отрывается и сносится вниз по потоку жидкости. Затем удлиняется и отрывается другой. На смену оторвавшимся вихрям возникают попеременно сверху и снизу новые вихри, которые также отрываются от цилиндра и уносятся вместе с потоком. Такой режим неустойчивости образуется чаще всего. В результате образуется так называемая вихревая дорожка Кармана, движение становится нестационарным, но периодическим [7].

Особое место занимает режим течения при  $Re \gg 1$ . В этом случае переход от нулевой скорости на поверхности обтекаемого тела к скорости, значение которой приближается к скорости внешнего потенциального течения идеальной (влияние вязкости становится пренебрежимо малым) жидкости, совершается в очень тонком по сравнению с размером обтекаемого тела слое жидкости, который называется *пограничным слоем*.

Течение вблизи поверхности обтекаемого тела внутри пограничного слоя является вихревым, поэтому жидкие частицы, поступающая во внешние невязкие области потока, сохраняют завихренность.

Причину образования вихрей качественно можно понять, рассмотрев изменение скорости и давления вдоль поверхности цилиндра. Вне пограничного слоя эти величины определяются из решения задачи об обтекании цилиндра идеальной жидкостью, в соответствии с которым скорость равна нулю в передней и задней критических точках ( $\theta = 0, \pi$ ) и максимальна в «миделе», т. е. при  $\theta = \pm\pi/2$ . В соответствии с теоремой Бернулли давление максимально в критических точках и минимально в «миделе». Поэтому за «миделем» жидкие частицы движутся в сторону возрастающего давления, что приводит к их замедлению. Кроме того, силы вязкости также приводят к затормаживанию частиц жидкости в пограничном слое. Поэтому, достигая областей течения в окрестности задней критической точки цилиндра, частицы начинают «ускоряться» в обратном направлении, т. е. возникает возвратное движение на фоне направленного вперед внешнего потока. В установившемся стационарном режиме картина во времени повторяется: новые порции жидких частиц, притекающие в область возвратного течения, сначала притормаживаются и затем начинают двигаться назад.

Для больших чисел Рейнольдса ( $Re > 1000$ ; *такие задачи на занятиях не рассматривались*) вихри уже не успевают сформироваться и заменяются вниз по потоку быстро турбулизующимися областями, поочередно отрывающимися от цилиндра и уплывающими вместе с жидкостью. В области значений  $Re \sim 10^3 - 10^4$  течение становится все более нерегулярным, что приводит к увеличению турбулизации потока за цилиндром. При этом отдельные частицы «закручиваются» во всех трех измерениях и задача перестает быть плоской. При  $Re \approx 10^5$  область турбулентности распространяется вплоть до поверхности цилиндра. За цилиндром возникает так называемый турбулентный след.

# Глава 5. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

## § 1. Основные соотношения

При решении различных научных и в особенности технических задач, связанных с течением жидкостей по трубам, одним из важных является вопрос о величине *гидравлических потерь*.

Обычно трубопроводы представляют собой систему, состоящую собственно из трубы или «русла» и различных конструктивных включений (заслонки, резкие сужения, расширения, и пр.). Под термином *гидравлические потери* принято понимать величину потерь энергии (напора), затрачиваемой на преодоление сопротивления движению жидкости, которая включает по отдельности:

- потери напора на преодоление гидравлических сопротивлений по длине пропорциональны длине участков трубы или русла, по которым движется жидкость (так называемые *потери по длине*);
- потери напора на преодоление гидравлических сопротивлений на участках трубы, находящихся в непосредственной близости к местным конструктивным устройствам (так называемые *местные потери*).

Обычно полагают, что общие потери напора в системе труб равны сумме потерь напора по длине отдельных участков и всех местных потерь. Потери энергии напора в основном обусловлены необратимым переходом механической энергии потока в тепловую. Механизмы действия сил сопротивления в конкретных системах трубопроводов очень сложны и практически не поддаются аналитическому описанию. Поэтому при расчетах потерь напора используют, как правило, *эмпирические* соотношения.

Ниже в качестве учебных задач, иллюстрирующих проблему оценки *гидравлических потерь*, рассматриваются задачи оценки местных потерь на примере потери давления при внезапном изменении сечения круглой трубы (рис. 2.6а).

Соотношения для модели идеальной жидкости, описывающие оценки для «*потерь*» давления, в случае расширения и сужения имеют соответственно вид [3]

$$\Delta P \equiv P_0 - P_1 = \rho \cdot U_0^2 / 2 \cdot [1 - F_0 / F_1]^2, \quad (5.1)$$

$$\Delta P \equiv P_1 - P_0 = \rho \cdot U_0^2 / 2 \cdot [\{F_0 / (F_1 \cdot \alpha)\}^2 - 1]. \quad (5.2)$$

Здесь  $F$  – площадь поперечного сечения трубы,  $U$  и  $P$  — скорость течения и давление в этом сечении, а индексы соответствуют обозначениям, приведенным на рис. 2.6. В формуле для сужения (5.2) появляется коэффициент сжатия потока  $\alpha$ , который может быть рассчитан по эмпирической формуле Вейсбаха [3]:

$$\alpha = 0.63 + 0.37 \cdot (F_1/F_0)^3; \quad (0.05 < F_1/F_0 < 0.55). \quad (5.3)$$

Следует заметить, что аналогичную формулу можно использовать и для анализа результата в задаче с локальным сужением («дроссельная шайба», см. рис. 2.6 б):

$$\Delta P \equiv P_2 - P_0 = \rho \cdot U_0^2 / 2 \cdot [F_1 / (F_0 \cdot \alpha) - 1]^2. \quad (5.4)$$

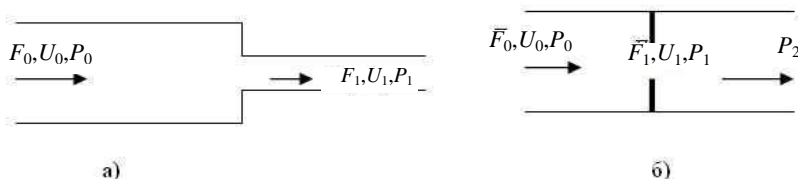


Рис. 2.6. а) внезапное сужение трубы; б) дроссельная шайба

Следует отметить, что при резком переходе от одного диаметра трубы к другому или при обтекании потоком какой-либо резкой преграды, может происходить отрыв струи от стенок канала. При этом возникают области вихревого течения; остальную часть потока называют транзитной (спутной) струей (рис. 2.11).

## § 2. Постановка задачи

В задаче проводится количественная оценка потерь полного давления при расширении потока  $\Delta P$ , затем рассчитанное значение потерь сравнивается с эмпирической формулой (5.1). Кроме этого, визуально изучается явление отрыва течения при расширении потока несжимаемой жидкости.

### Условие задачи

Несжимаемая жидкость течет по каналу переменного сечения заданной формы. При резком расширении канала возможно образование вихрей (водоворотных областей) и отрыв потока, что существенно влияет на величину гидравлических потерь.

Задача состоит в том, чтобы рассчитать *расширение* потока, задав *втекание* жидкости со стороны узкой части трубы, а затем —

сужение потока, сделав копию файла и поменяв местами два граничных условия. Таким образом, созданную один раз геометрию, можно использовать дважды.

### Цели работы

1. Получение картины установившегося течения в расширяющемся и сужающемся канале.

2. Вычисление потери полного давления  $\Delta P$  и сравнение расчетной величины с эмпирическими данными для расширяющегося и сужающегося каналов.

3. Помимо достижения этих целей также изучается явление отрыва течения при расширении потока несжимаемой жидкости.

### § 3. Задание

1. Создать геометрическую основу задачи — плоский канал {1}. Длина канала  $l = 0.2$  м, узкая половина сечения  $d_1 = 0.01$  м, широкая —  $d_2 = 0.02$  м:



Рис. 2.7. Геометрия плавно расширяющегося канала



Рис. 2.8. Геометрия расширяющегося канала

- Для варианта плавно расширяющегося канала (на рис. 2.7 и рис. 2.8 в силу симметрии показана только верхняя часть канала,

для которой и производится расчет) с помощью кнопки «Касательная дуга» соединить узкую и широкую части канала.



Рис. 2.9. Геометрия резко расширяющегося канала

- Задать границы. В данном случае рассматриваются следующие границы: правая, левая грани параллелограмма и остальные {2}.
  - Экспортировать созданное трехмерное тело {3}.
  - Выбрать расчетную модель. В данной задаче решаются уравнения Навье–Стокса для ламинарного течения несжимаемой жидкости {10}.
  - Ввести физические параметры: плотность —  $1000 \text{ кг/м}^3$  и вязкость —  $0 \text{ Па}\cdot\text{с}$  {5}.
2. Ввести граничные условия {6}. На верхней и «нижней» (условная плоскость симметрии) границах задается условие «Стенка без прилипания». На левой или правой границе в зависимости от направления течения задаются условие втекания с заданной скоростью («Нормальный вход/выход» —  $U = 0.01$ ), а на выходе из канала — условие «Свободный выход/Нулевое давление».
  3. Создать расчетную сетку: рекомендуемое число ячеек в горизонтальном направлении — 100, в вертикальном — 80. Для ускорения расчета можно в узле дерева «Общие параметры» (препроцессор) во вкладке «Шаги» задать «Макс. шаг» 10, CFL = 100 {8}.
  4. Подготовить к работе постпроцессор {12}:
    - а) создать плоскость (совпадает с плоскостью течения) {13}.
    - б) создать плоскости поперечного сечения вблизи входа ( $x_0 = -0.08$ , нормаль (1, 0, 0)) и выхода канала (нормаль (1, 0, 0),  $x_0 = 0.08$ );
    - в) создать горизонтальную линию на оси канала (вблизи нижней границы) {14};

г) на плоскостях поперечного сечения создать слои, отражающие интегральные характеристики {9}. В окне с названиями и значениями параметров представлено статическое давление ( $\langle f \rangle$  по потоку) и полное давление ( $\langle P_{\text{то}} * V * V / 2 \rangle$  по потоку), осредненные по потоку в данном сечении;

д) на плоскости, совпадающей с плоскостью течения, отобразить распределение скорости в канале и линии тока {15, 26};

е) провести расчет задачи; в процессе расчета отслеживать изменения картины течения {10}.

5. Представить отчет о проделанной работе, в который вставить следующую таблицу {24}:

Т а б л и ц а 2.3

### Потери давления при сужении (расширении) канала

$P_{n1}$	$P_{n0}$	$\Delta P_n$	$P_{cm1}$	$P_{cm0}$	$\langle \frac{\rho U_1^2}{2} \rangle$	$\langle \frac{\rho U_0^2}{2} \rangle$
Эксп.						
Теор.						

Здесь введены следующие обозначения:

« $0$ » — входное сечение, « $1$ » — выходное сечение;

$\Delta P_n$  — потеря полного давления;

$P_{cm0}$  — статическое давление во входном сечении;

$P_{cm1}$  — статическое давление в выходном сечении;

$U_0$  — скорость во входном сечении;

$U_1$  — скорость в выходном сечении;

$P_{n0} = P_{cm0} + \frac{\rho U_0^2}{2}$  ,  $P_{n1} = P_{cm1} + \frac{\rho U_1^2}{2}$  — полное давление соответственно во входном и выходном сечениях.

Строка «Эксп.» относится к результатам, полученным с помощью численного эксперимента, строка «Теор.» относится к результатам, полученным с помощью расчета по формулам (5.1), (5.2).

## § 4. Представление результатов

1. Сравнить рассчитанные потери полного давления с теоретическими значениями для случаев расширения и сужения канала. При

наблюдении существенных различий привести физическое объяснение.

2. Построить графики изменения давления вдоль горизонтальной линии, а также распределение модуля скорости и линии тока на плоскости течения.

В качестве примера на рис. 2.10 показаны график давления вдоль горизонтальной линии и распределение давления по плоскости течения (различными цветами).

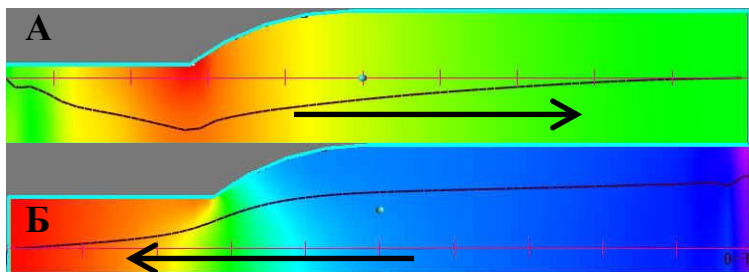


Рис. 2.10. Распределения давления в расширяющемся и сужающемся канале (стрелками обозначено направление течения)

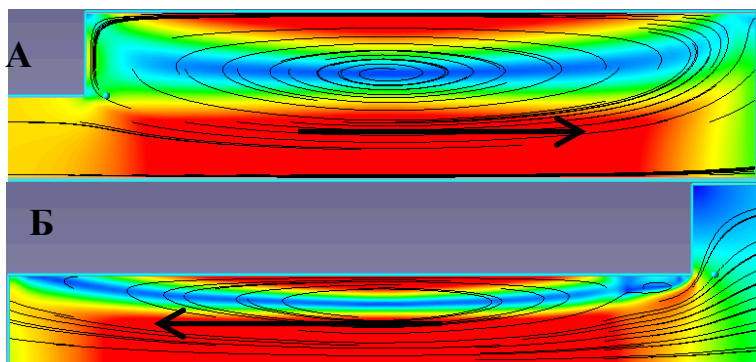


Рис. 2.11. Распределения скорости и линии тока в расширяющемся и сужающемся канале (стрелками обозначено направление течения)

Рис. А относится к варианту втекания потока со стороны узкой части плавно расширяющегося канала, рис. Б — к втеканию со стороны широкой части. На рис. 2.11 для варианта с резким расшире-



нием сечения канала показаны распределения модуля и скорости и линии тока.

Из анализа приведенных примеров расчетов, а также аналогичных вариантов, которые могут быть рассмотрены на учебном занятии вытекает важный качественный вывод:

В случае канала с расширяющимся сечением (*плавный и резкий случаи*) расширение потока имеет место не сразу за местом расширения канала, а на некотором расстоянии вниз по течению. Об этом можно судить как по «поведению» (статического) давления вдоль потока (рис. 2.10), которое восстанавливается *не сразу* после расширения, так и по характеру поля скоростей и линий тока (рис. 2.11). В широкой части канала при этом возникают вихри.

В случае, когда мы рассматриваем течение по сужающемуся каналу, можно наблюдать выполнение закона Бернулли (с уменьшением ширины канала давление пропорционально уменьшается, а скорость увеличивается). Правда, в случае резкого сужения канала (рис. 2.11) возможно образование вихрей, которые увеличивают коэффициент сжатия потока.

## Г л а в а 6. ОБТЕКАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА И ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

### § 1. Основные соотношения

Теоретическое описание обеих задач, основанное на применении методов теории функции комплексного переменного, приводится в Приложении.

В этой связи здесь приведем только основные соотношения. Суммарная подъемная сила, действующая на пластину, представляющей собой отрезок размером  $[+a, -a]$ , вдоль оси  $z$  и ее проекции на оси  $x$  и  $y$  равны соответственно:

$$P = |R| = 2\pi a \rho |V_\infty|^2 \sin \alpha, \quad (6.1)$$

$$R_x = -2\pi \rho |V_\infty|^2 a \sin^2 \alpha, \quad (6.2)$$

$$R_y = 2\pi \rho |V_\infty|^2 a \sin \alpha \cos \alpha, \quad (6.3)$$

где  $\alpha$  — угол атаки,  $V_\infty$  — скорость потока на бесконечности,  $a$  — ширина пластины.

Коэффициент подъемной силы:

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho|V_\infty|^2 S}; \text{ при малых } \alpha \ C_p \cong 2\pi\alpha. \quad (6.4)$$

Момент сил, действующих на пластину:

$$L = -\frac{\pi a^2}{2}\rho|V_\infty|^2 \sin 2\alpha; \quad (6.5)$$

$$L = -\frac{a}{2}P \cos \alpha. \quad (6.6)$$

Распределение скорости на пластине:

$$V = |V_\infty| \left( \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \right). \quad (6.7)$$

На задней кромке:

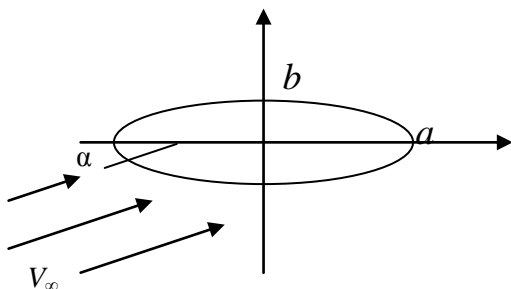
$$V = |V_\infty| \cos \alpha. \quad (6.8)$$

Ссылаясь на приложение, без подробного вывода приведем момент сил для эллиптического цилиндра:

$$L = -\frac{\pi\rho}{2}(a^2 - b^2)|V_\infty|^2 \sin 2\alpha, \quad (6.9)$$

где  $a$  — большая полуось цилиндра,  $b$  — малая полуось эллипса.

## § 2. Постановка задачи



### Условие задачи

Идеальная несжимаемая жидкость обтекает эллиптический цилиндр (с полуосями  $a$  и  $b$ ), большая полуось которого находится под заданным углом атаки ( $\alpha$ ) к направлению потока. Скорость жидкости на

бесконечно большом расстоянии от цилиндра обозначим  $V_\infty$ . Важным предельным случаем является обтекание плоской пластины: эллиптического цилиндра с малой полуосью нулевой толщины.

### Цели работы

1. Сравнение результатов расчетов с выводами теории плоского безвихревого обтекания рассматриваемого тела (пластина и эллиптический цилиндр) идеальной несжимаемой жидкостью и оценка области применимости теории.
2. Получение для визуального анализа картин течения: линии тока, распределения скорости.
3. Вычисление подъемной силы и момента сил, действующих на пластину (или эллипс), и сравнение с теоретическими оценками.

Примечание. Для уверенности в правильности полученного решения необходимо один и тот же вариант задачи рассчитать не менее 3-х раз, отличающихся шагом по времени и шагом сетки. Полученные результаты (особенно числовые) должны быть приведены для каждого расчета.

### § 3. Задание

1. Создать геометрическую основу задачи: плоский канал под углом  $\alpha$ :  $\operatorname{tg}\alpha = 0.01$  (или 0.025, 0.05, 0.1, 0.2) (прямоугольник размером  $2.5 \times 1 \text{ м}^2$ ); эллипс, размер большой полуоси которого  $a = 0.5 \text{ м}$ , малой полуоси  $b = 0.01 \text{ м}$  для пластины или 0.05, 0.2, 0.4 м для эллипса в зависимости от варианта задачи. Размер по третьей координате 1 м.

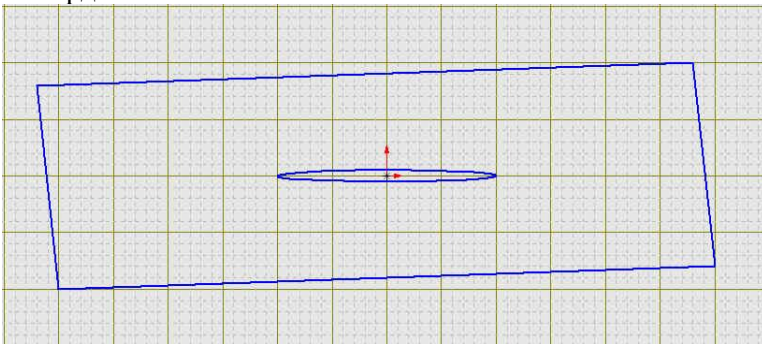



Рис. 2. 12. Геометрия расчетной области для решения задачи об обтекании эллипса идеальной жидкостью под углом

- При рисовании в Solid Works лучше пользоваться кнопкой «Линия» , чтобы наблюдать координаты начала и конца линии {1}.
2. Задать границы. В данном примере различают четыре границы: цилиндр, правая, левая грани и остальные {2}.
  3. Экспортировать созданное трехмерное тело {3}.
  4. Выбрать расчетную модель, состоящую из набора уравнений. В данной задаче решаются уравнения Навье–Стокса для ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости {4}.
  5. Ввести физические параметры. Плотность  $1000 \text{ кг/м}^3$  и вязкость  $0 \text{ Па}\cdot\text{с}$  {5}.
  6. Ввести граничные условия. На поверхности эллипса следует задать граничное условие «стенка без проскальзывания», а на верхней, нижней, передней и задней гранях стенки канала — «стенка без прилипания». На левой грани параллелепипеда задать скорость «Нормальный вход/выход»  $0,1 \text{ м/с}$ , на правой — условие «Свободный выход/Нулевое давление» {6}.
  7. Создать расчетную сетку. Рекомендуется создавать следующую сетку: число ячеек в горизонтальном направлении — 100, в вертикальном — 50. В области эллиптического цилиндра рекомендуется сетку сгустить {8}.
  8. Настроить работу постпроцессора, для чего создать следующие объекты {12}:
    - а) создать плоскость (совпадающую с плоскостью расчета){13},
    - б) на плоскости создать слои визуализации, соответствующие распределению скоростей и давлений {15}.
  9. Рассчитать интегральные характеристики (силы, моменты), действующие на эллипс {21}.
  10. Провести расчет задачи; при этом необходимо одновременно следить за изменениями картины течения. Чтобы ускорить расчет рекомендуется в «Общие параметры» (препроцессор) во вкладке «Шаги» задать «Макс. шаг» = 10, CFL = 100 {10}.
  11. Построить линии тока с помощью группы частиц {23}.
  12. Построить двумерный график распределения скоростей на верхней и нижней части эллипса {17}.
  13. Представить отчет о проделанной работе {24}, в который включить следующую таблицу:

### Расчет и сравнение с теорией силы и момента сил

$\operatorname{tg} \alpha$	$a$	$b$	$R_{xe}$	$R_{ye}$	$L_{ze}$	$R_{xt}$	$R_{yt}$	$L_{zt}$

Здесь введены следующие обозначения:

$\operatorname{tg} \alpha$  — тангенс угла набегания потока;

$a$  — размер большой полуоси эллипса или половина длины пластины;

$b$  — размер малой полуоси эллипса;

$R_{xe}$  и  $R_{ye}$  — полученные в численном эксперименте значения сил, действующие на пластину соответственно в направлении осей  $X$  и  $Y$ ;

$L_{ze}$  — полученное в численном эксперименте значение момента сил, действующих на пластину;

$R_{xt}$ ,  $R_{yt}$ ,  $L_{zt}$  — те же величины, рассчитанные теоретически по формулам ( 6.2, 6.3, 6.5 или 6.9).

#### § 4. Представление результатов

На рис. 2.13 — 2.15 представлены результаты расчетов.

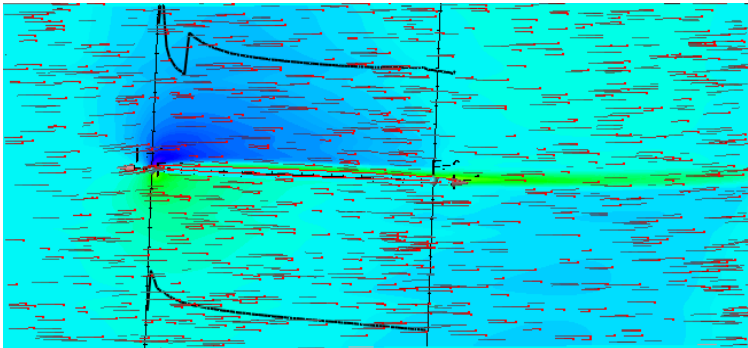


Рис. 2.13 Обтекание плоской пластины при  $\operatorname{tg} \alpha = 0.05$

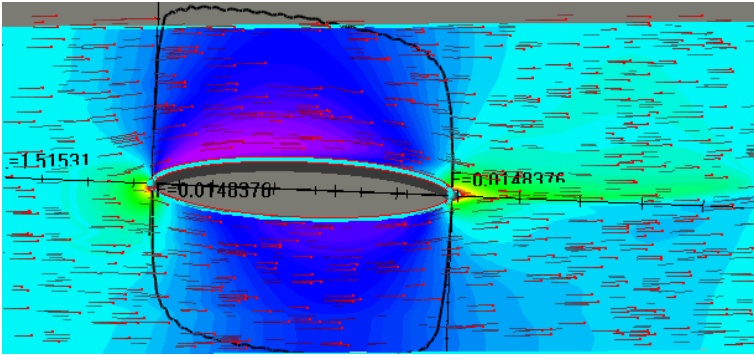
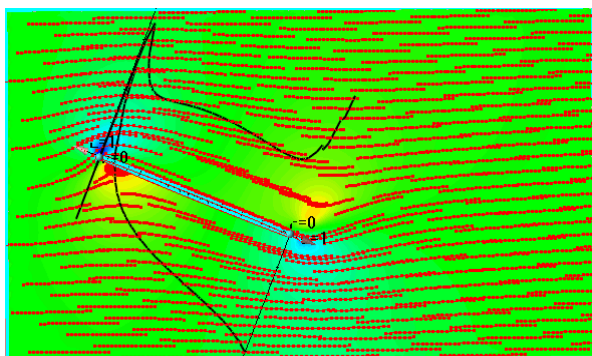


Рис. 2.14. Обтекание эллиптического цилиндра с  $b = 0.1$   
при  $\text{tg}\alpha = 0.05$

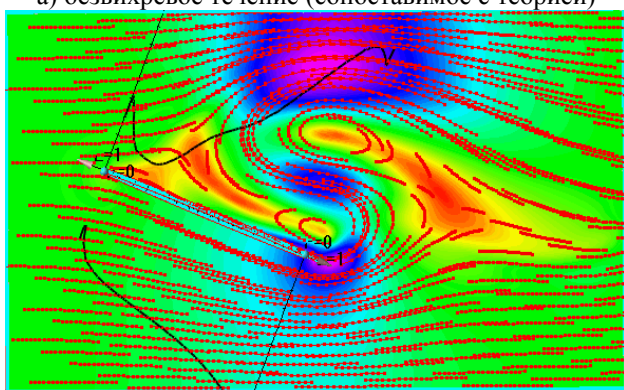
На обтекаемое тело действует сила Жуковского ( $\mathbf{P}$ ), направленная перпендикулярно направлению потока на бесконечности, а также момент сил ( $\mathbf{L}$ ), стремящийся увеличить угол атаки. При больших углах атаки за цилиндром возникают вихри, стационарные или периодически отрывающиеся от задней поверхности тела. Это существенно влияет на величину и направление силы и момента.

При сравнении результатов численных расчетов с теорией, как правило, возникают следующие основные несоответствия:

- В расчетах значение скорости в окрестности передней кромки тела имеет лишь незначительный максимум, в то время как в соответствии с теорией скорость в этой точке должна обращаться в бесконечность. Здесь расчет ближе к реальности, чем теория. На рис. 2.13 и рис. 2.14 показано обтекание при малом угле атаки плоской пластины и эллиптического цилиндра соответственно. Черный график в верхней полуплоскости — распределение скорости вдоль верхней стороны, черный график в нижней полуплоскости — вдоль нижней стороны пластины (эллипса).
- В расчетах наблюдается вихревой характер течения, который проявляется сильнее при больших углах атаки и приближении формы обтекаемого тела к пластине. По этому признаку расчет дает более реальную картину, чем теория. На рис. 2.15, рис. 2.16. представлено обтекание пластины и эллиптического цилиндра при больших углах атаки.



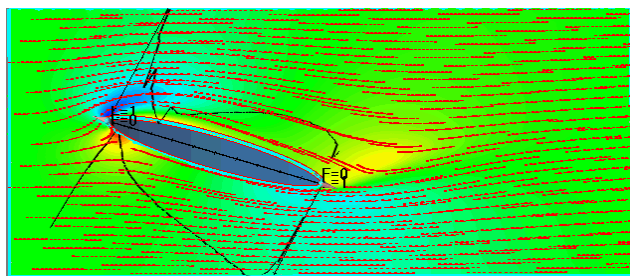
а) безвихревое течение (сопоставимое с теорией)



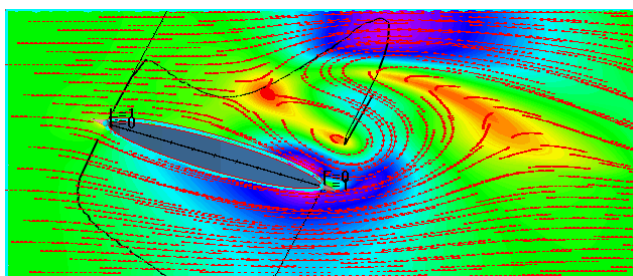
б) течение с вихрями

Рис. 2.15. Обтекание плоской пластины при  $\operatorname{tg}\alpha = 0.4$

Расчетные значения действующих на обтекаемое тело сил и момента могут отличаться от теоретических значений в несколько раз. В случае вихревого течения такое отличие объяснимо (формулы относятся к безвихревому обтеканию пластины), а вот в оставшихся случаях следует больше доверять теории, чем численному эксперименту. Погрешность расчета в данном случае связана с дискретным представлением поверхности обтекания и с накоплением ошибок машинного округления, сильно проявляющихся при вычитаниях больших близких чисел.



а) безвихревое течение



б) течение с вихрями

Рис. 2.16. Картина обтекания эллиптического цилиндра с  $b = 0.1$  при  $\operatorname{tg}\alpha = 0.4$

## Г л а в а 7. УДАР ВОЗДУХА О ТОРЕЦ ПЛАСТИНЫ

### § 1. Основные соотношения

#### Что такое удар и присоединенная масса?

Применительно к воздействию тела на газ, сжимаемую или несжимаемую жидкость *удар* — это быстрое (внезапное) приведение среды в движение. Для определения условий возникновения режима течения, соответствующих удару, необходимо сравнить характерное время выравнивания давления около поверхности тела при внезапном изменении скорости ( $\Delta t$ ) и время приведения в движение ударника (среды) ( $\Delta \tau$ ).

Для ( $\Delta t$ ) можно привести оценку [6]:

$$\Delta t = L/a, \quad (7.1)$$



где  $L$  — характерный размер ударника (радиус тела),  $a$  — скорость звука. Условие возникновения течения, соответствующее удару, определяется неравенством  $\Delta t \ll \Delta t$ .

В зависимости от направления движения ударника (навстречу жидкости или в противоположную сторону) различают два режима движения, сопровождающихся возникновением в первом случае волны сжатия и во втором — волны разрежения. При этом волны сжатия и разрежения движутся со скоростью звука.

При ударе среды (газа или жидкости) о тело (как впрочем при любом ускоренном движении тела в жидкости) по сравнению с обычными силами гидродинамического сопротивления возникают дополнительные силы, вызванные инерцией окружающей тело среды. Эта сила, как и любая другая, связанная с ускоренным движением, подчиняется закону Ньютона, т. е. пропорциональна ускорению и массе, участвующей в движении.

Какая же масса участвует в движении, когда тело движется в среде с ускорением? Тело, в данном случае ударник, приводит в движение всю окружающую массу жидкости (газа). При этом близлежащие слои движутся со скоростью самого тела, а более удаленные вовлекаются в движение в меньшей степени. И только бесконечно удаленные от тела частицы жидкости остаются неподвижными.

Для количественного описания таких движений вводится понятие *присоединенной массы*, представляющей собой некую фиктивную массу, которая будучи добавлена к массе тела, заменяет инерционное воздействие всей жидкости (газа). Особенностью присоединенной массы является то, что она зависит не только от геометрии тела, но и от направления его движения. В общем случае вычисление присоединенной массы представляет собой довольно сложную задачу математической физики [8]. При ударном нагружении характерное время формирования присоединенной массы соответствует времени распространения звуковой волны около тела [6]. При движении тела с ускорением она меняется все время, пока есть ускорение. После формирования присоединенная масса как бы движется вместе с телом изменяя его форму.

В качестве основной учебной задачи ниже рассматривается режим *слабого удара* воздуха о торец пластины, т. е. случай, когда

скорость тела (ударника) или среды много меньше скорости звука в воздухе.

### Слабый удар

Для рассмотрения процессов при внезапном приведении тела (ударника) в движение рассмотрим схему описания процесса. На схеме стрелками сверху представлены значения скоростей в системе координат, связанной с волной (скачком) давления, образовавшейся при внезапном изменении скорости. Стрелками снизу обозначены скорости в системе координат, связанной с неподвижным воздухом перед движущимся телом.

Для того чтобы записать уравнения, описывающие рассматриваемую задачу, выберем систему координат, в которой образующаяся слабая ударная (звуковая) волна будет покоиться. В рассматриваемом режиме (слабый удар) скорость волны давления можно считать равной скорости звука ( $a$ ),  $\Delta u$  — приращение скорости при ударе.

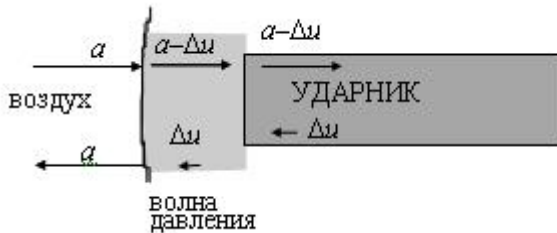


Рис. 2.17. Схема описания слабого удара

От системы координат, связанной с воздухом, перейдем к системе координат, связанной с волной (верхние обозначения). В этом случае можно рассматривать задачу как одномерную стационарную до тех пор, пока не возникнут краевые эффекты.

Начальную фазу движения можно считать одномерной и нестационарной. Изменение давления для нее получается из второго закона Ньютона  $F = m \cdot \dot{u}$ .

Заменим выражения силы  $F$ , массы  $m$  и ускорения  $\dot{u}$  выражениями для движения газа:

$$F = -SdP; \quad m = \rho Sdx; \quad \dot{u} = \frac{du}{dt};$$

где  $S$  — единичная площадь; тогда получаем

$$\begin{aligned}
 -SdP &= \rho Sdx \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} du + \frac{dP}{\rho} = udu + \frac{dP}{\rho} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow dP = -\rho u du.
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

Для перехода от бесконечно малых приращений ( $dP$ ,  $du$ ) к конечным малым изменениям ( $\Delta P$ ,  $\Delta u$ ), нужно воспользоваться тем что мы рассматриваем слабый удар, т. е. изменения скорости много меньше скорости звука. В этом приближении можно считать скорость воздуха, набегающего на волну давления, равной скорости звука, т. е. в выражении (7.2) можно считать  $u = a = \text{const}$ , так же как и плотность  $\rho$ . Получаем

$$\Delta P = -\rho a \Delta u. \tag{7.3}$$

### Общий случай и линеаризация

В том случае, если изменения скорости нельзя считать очень малыми, задачу об ударе можно решить в общем виде, рассмотрев отражение ударной волны от тела. Решение для слабого удара можно получить линеаризацией общего решения.

Рассмотрим покоящееся тело, на которое набегают ударная волна; будем называть набегающую на тело ударную волну падающей, а отраженную от тела ударную волну — отраженной.

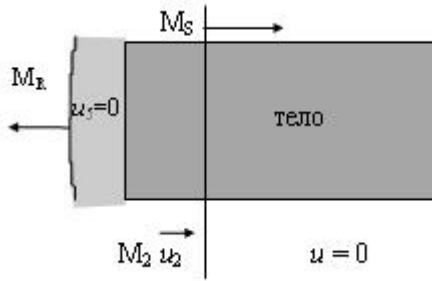


Рис. 2.18. Схема описания удара

На рисунке числа Маха падающей и отраженной ударных волн обозначены  $M_S$  и  $M_R$  соответственно;  $u_1$  — скорость за отраженной ударной волной, равная нулю;  $u$  — скорость перед падающей ударной волной, также равная нулю;  $u_2$  — скорость за падающей ударной волной.

Для падающей и отраженной ударных волн существуют следующие выражения, получаемые из уравнений сохранения [6], см. также раздел 3, глава 2 данного пособия.

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \frac{2}{\gamma+1} a_1 \left( M_s - \frac{1}{M_s} \right), \\
 \frac{P_2}{P_1} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_s^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \\
 \frac{P_5}{P_2} &= \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + 2 - \frac{P_1}{P_2}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_1}{P_2}}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

$\frac{P_2}{P_1}$  — отношение давлений на падающей ударной волне;  $\frac{P_5}{P_2}$  —

отношение давлений на отраженной ударной волне.

Уравнения (7.4) позволяют получить соотношения для отношения давлений на отраженной волне через параметры набегающего потока (или за падающей ударной волной), соответствующие параметрам после удара или внезапного приведения среды в движение. В системе уравнений (7.4) мы исключаем падающую ударную волну, т. е. параметры с индексами «1» и «s». Остаются давление и число  $M_2$  приведенного в движение потока:

$$\frac{P_5}{P_2} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M_2^2 \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{4}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{M_2^2}} \right). \tag{7.5}$$

Выражение (7.5) связывает число  $M_2$  приведенного в движение потока с отношением давлений на ударной волне, отражающейся от тела. Если считать в (7.5) число  $M_2$  много меньшим единицы, то получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{P_5}{P_2} &\Rightarrow 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M_2^2 \left( 1 + \left( \frac{4}{\gamma+1} \right) \frac{1}{M_2} \right) \approx \\
 &\approx 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M_2^2 + \gamma M_2 \approx 1 + \gamma M_2 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{P_2} = \gamma M_2 \Rightarrow \Delta P = \gamma P_2 M_2 = \frac{\gamma P_2 \rho M_2}{\rho} = \rho u_2 a_2.$$

Поскольку  $a_2$  мало отличается от начальной скорости звука  $a$ ;  $u_2$  — есть изменение скорости  $\Delta u$ , то получаем выражение (7.3) по модулю. Определить давление для установившегося потока по прошествии удара можно по уравнению Бернулли, являющимся интегралом (7.2) для случая постоянной плотности:

$$\Delta P_1 = \rho \frac{\Delta u^2}{2}. \quad (7.6)$$

Отношение пикового значения изменения давления ( $\Delta P$ ) и установившегося изменения давления ( $\Delta P_1$ ) (выражения (7.3) и (7.6)):

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_1} = \frac{2a}{\Delta u}. \quad (7.7)$$

Для скорости 10 м/с отношение изменений давлений составляет 66 раз, а для скорости 1 м/с составляет 660 раз. Формулы (7.3), (7.6) и (7.7) вполне пригодны и для оценки давления при ударе о воду, при этом скорость звука должна быть принята  $a = 1500$  м/с. Давление при ударе в воде (о воду) в 4500 раз выше, чем в воздухе и составляет 15 атмосфер при скорости удара 1 м/с.


## § 2. Постановка задачи

Моделируется обтекание пластины потоком воздуха со скоростью 10 м/с. В начальный момент времени воздух покоится. При приведении воздуха в движение перед пластиной образуется ударная волна, которая распространяется навстречу потоку и тормозит газ. Именно импульс торможения и приводит к большему превышению начального давления над стационарным значением. Следует обратить внимание на то, что удар сопровождается ударной волной при сколь угодно малых скоростях.

**Цель работы** состоит в определении давления при ударе и динамики его уменьшения к давлению, соответствующему стационарному обтеканию, которое определяется уравнением Бернулли.

## § 3. Задание

1. Создать геометрическую основу задачи с помощью программы Solid Works. С помощью кнопки «Линия» нарисовать геометрию

так, чтобы «исходная точка»  в середине экрана находилась в левом нижнем углу создаваемой расчетной области. В приведенном ниже варианте размер области задается следующий:  $12 \times 8 \text{ см}^2$  (в силу симметрии строится только половина области). Создать расчетную область, как показано на рис. 2.19 {1}.

2. Задать границы. В данном примере различают три границы. Правая, левая грани и остальные {2}.

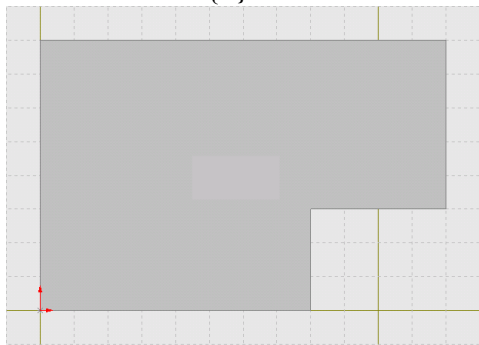


Рис. 2.19. Геометрия расчетной области при ударе воздуха о пластину

3. Экспортировать созданное трехмерное тело {3}.
4. Выбрать расчетную модель, состоящую из набора уравнений для «полностью сжимаемой вязкой жидкости» {4}.
5. Ввести физические параметры: во вкладке «Плотность» в окне «Зависимость» выбрать «Закон идеального газа», во вкладке «Молекулярная вязкость» в окне «Зависимость» выбрать «Значение», установить значение  $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$  {5}.
6. Ввести граничные условия. На правой границе (у выхода из канала) — условие свободного вытекания с нулевым давлением (тип границы — «Свободный выход», тип граничного условия «Свободная граница»), а на левой границе (у входа в канал) тип границы — «Вход/выход», тип граничного условия — «Давление на входе 2». Ввести значения для скорости  $10 \text{ м/с}$ , для давления —  $0$ . На остальных границах тип границы «стенка»; тип граничного условия — «стенка с проскальзыванием» {6}.
7. Создать расчетную сетку. В данной задаче для экономии машинных ресурсов можно создать редкую расчетную сетку. Рекомендуется взять число ячеек в горизонтальном направлении —

120, а в вертикальном — 80. В окрестности выступа (начало пластины) рекомендуется сгустить сетку, для чего необходимо вставить ~ 10 вертикальных линий во вкладке X-направление {8}.

8. Настроить работу постпроцессора {12}. Создать плоскость (совпадающую с плоскостью расчета) {13}. Для расчета давления в центре и на периферии пластины создать две плоскости. Нормальный вектор к плоскости задать в виде (1, 0, 0), для первой плоскости координаты  $x_0 = 0.0799$ ,  $y_0 = 0.0299$ ,  $z_0 = 0.005$  (координаты точки, лежащей на периферии пластины). Аналогично создать вторую плоскость, для которой задать координаты  $x_0 = 0.0799$ ,  $y_0 = 0.001$ ,  $z_0 = 0.005$  (координаты точки, лежащей близко к оси пластины).

9. Создать две горизонтальных линии на оси канала (вблизи нижней границы; «Источник прямой»:  $x_0 = 0.0799$ ,  $y_0 = 0.001$ ,  $z_0 = 0.005$ ) и вблизи края пластины ( $x_0 = 0.0799$ ,  $y_0 = 0.02999$ ,  $z_0 = 0.005$ ), нормальный вектор — (1, 0, 0) {14}.

10. На каждой линии создать двумерный график {16} (график давления). В свойствах каждого графика, возможно, изменить ориентацию плоскости «Ориентация» — 180 градусов.

11. Отобразить распределение давления в канале {15}.

12. Результаты записать в файл путем создания на плоскости, начальные координаты которой соответствуют точке на оси пластины, слоя характеристик {19}.

13. Подключить *фильтр* для того чтобы задать в начальный момент времени во всех точках пространства скорость 10 м/с {7}.

14. Для ускорения расчета рекомендуется в препроцессоре в «Общие параметры» во вкладке «Шаги» задать «Макс. шаг»  $2 \cdot 10^{-8}$ , CFL = 1 {9}.

15. Выполнить предварительный и окончательный расчет задачи {10}.

16. Представить отчет о проделанной работе {24}, в который вставить следующую таблицу:

Т а б л и ц а 2.5

### Расчет и сравнение с теорией давления при ударе

	Теория	Расчет
Давление при ударе, $\Delta P$ (Па)		
Время воздействия на оси, с		
Стационарное значение давления, $\Delta P$ (Па)		

## Р а з д е л 3. РЕШЕНИЕ УЧЕБНЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА GAS DYNAMICS TOOL

### Г л а в а 1. АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ В GAS DYNAMICS TOOL

В главе описывается последовательность действий при использовании пакета Gas Dynamics Tool.

#### § 1. Выбор параметров пакета

Как отмечалось в главе 2, используемая в пособии учебная версия пакета Gas Dynamics Tool (GDT) имеет определенные ограничения. Поэтому далее будем использовать двумерную модель, основанную на уравнениях Эйлера (*без теплопроводности, вязкости и диффузии*)

Для того чтобы проводить расчеты с использованием пакета GDT необходимо задать набор параметров, перечень которых приводится в таблице 2.6. Там же приведены рекомендуемые значения некоторых из них с соответствующими комментариями.

В окне физических параметров пакета GDT по умолчанию обычно задаются параметры для воздуха, что облегчает решение задач по сжимаемому газу: в этом случае ничего менять не приходится. Также по умолчанию в начальный момент времени во всей расчетной области предполагается, что скорость равна нулю, а давление равно атмосферному.

При расчетах газодинамических течений с использованием пакета GDT имеет место особенность, связанная с постановкой граничных условий: эти условия задаются как на границах твердых тел, так и на границах области расчета (счетная зона). На границе счетной зоны могут быть заданы условия трех типов: граница с постоянными параметрами, свободная граница и ось симметрии. Для свободной границы значения принимаются равными значениям в соседнем слое счетной зоны.

В программе GDT предусмотрена также возможность добавления элементарных областей и изменения граничных конфигура-



ций в процессе расчета, так же, как и изменение временного шага (параметр Stability).

Т а б л и ц а 3.1

**Набор параметров, задаваемых для расчета в пакете GDT**

Параметр	Ориентировочное значение	Комментарий
Ширина расчетной области	200	Достаточно для пробы
Высота	100	Достаточно для пробы
Размер ячейки	0.01	Важен при анализе времени развития реального процесса
Периодичность	нет	Да, если имеется периодичность в граничных условиях
Двумерная или осесимметричная задача	двумерная	Осевая симметрия особенно полезна при моделировании сферических задач, течений в трубах и обтеканий тел вращения
Учитывать ли гравитацию	нет	Для сверхзвуковых потоков гравитация не существенна
Число шагов	2000	Обычно достаточно для пробы
Stability (меняет шаг по времени, влияет на устойчивость расчета)	0.2–1	Если программа выдает сбой в начале работы, нужно на первые 100–200 шагов установить Stability 1–5, а скорость счета тем выше, чем меньше устойчивость

**§ 2. Визуализация с помощью постпроцессора**

В основе блока представления результатов в постпроцессоре пакета GDT положены графические средства визуализации, в основе которых предположение о возможности представления произвольного вещественного числа на поле расчетной области либо в виде точки, либо графически. Постпроцессор GDT позволяет:

- выводить на экран распределение любого параметра через задаваемые промежутки времени;
- организовывать представление результатов в многооконном режиме;
- применять линейные и нелинейные цветовые шкалы;
- просматривать и записывать значение каждого параметра в счетной зоне;
- создавать *avi-файлы* с визуализацией параметров.

### § 3. Проведение расчетов и представление результатов

При проведении расчетов с использованием пакета GDT необходимо учитывать особенности, связанные с использованием прямоугольной сетки. Например, если расположить обтекаемую газом пластину в расчетной области под некоторым углом атаки, то из-за прямоугольности расчетной сетки и конечности размера расчетных ячеек в результате численного расчета может получиться отошедшая ударная волна, а вместо наклонной пластины — «лесенка». Поэтому в данном примере, для исключения этих артефактов, целесообразно в счетной зоне задавать наклонный поток и горизонтальную пластину.

Отчет о работе, выполненной с использованием пакета GDT, рекомендуется оформлять с использованием текстового редактора Word.

В отчете должны быть представлены *следующие результаты*.

- **Сводка параметров расчета**

Количество ячеек по  $x$

Количество ячеек по  $y$

Геометрия осевая (плоская)

Число шагов

Stability

Начальные параметры в поле ( $P, \rho, u$ )

Граничные условия

- **Результаты расчета**

Параметр	Расчет	Теория
Давление		
Скорость		

Число М

В случае расхождения результатов расчета и теории необходимо привести письменное объяснение. При этом следует иметь в виду, что такие расхождения могут быть связаны как неточностью теории, так и погрешностями при численном моделировании, а также другими причинами.

- **Картина течения** с распределением значений давления или скорости. Для захвата изображения можно использовать клавишу Print Screen или внешнюю программу.
- **Картина течения** с двумерными графиками, полученными в результате расчетов, и соответствующие комментарии.

## Г л а в а 2. УДАРНАЯ ВОЛНА

Моделирование ударной волны представляется наиболее простой задачей для освоения пакета GDT. В этом случае в расчетном поле задаются параметры сверхзвукового потока и помещается какое-либо тело с плоской передней частью. На теле должно установиться сверхзвуковое обтекание с отошедшей ударной волной (если тело не слишком велико по сравнению с полем течения). На оси (плоскости симметрии) обтекания, где имеется прямая ударная волна, производится сопоставление теоретических значений и результатов численного моделирования.

### § 1. Основные соотношения

Уравнения, описывающие изменения параметров в ударной волне, имеются в большинстве учебников по МЖГ, например [3, 4, 6, 8]. В пособии приводится краткий вывод уравнений импульсов и энергии.

#### **Уравнение импульсов для стационарного течения**

В случае движения ударной волны в канале уравнения удобно записывать в системе координат, в которой ударная волна покоится. В этом случае течение можно считать *стационарным*. Уравнение импульсов получается из второго закона Ньютона  $F = m\dot{u}$ .

Выразим силу и массу через давление, плотность и единичную площадь:

$$F = -SdP; \quad m = Sdx; \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}. \quad (2.1)$$

Тогда уравнение движения запишется в виде

$$-SdP = \rho Sdx \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} du + \frac{dP}{\rho} = u du + \frac{dP}{\rho} = 0. \quad (2.2)$$

В канале постоянного сечения произведение плотности на скорость постоянно, поэтому получаем следующий интеграл уравнения импульсов для прямой ударной волны:

$$\frac{dP}{dx} + \rho u \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow P + \rho u^2 = \text{const}. \quad (2.3)$$

### Уравнение энергии

В отсутствие внешних и химических источников тепла с использованием уравнения импульсов получаем из первого начала термодинамики:

$$dQ = dE + PdV, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} dQ = 0 = dE + pdV &= dE + pdV + VdP - VdP = \\ &= dE + pdV + VdP + udu = d\left(E + PV + \frac{u^2}{2}\right) = d\left(h + \frac{u^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $E$  — внутренняя энергия,  $h$  — энтальпия. Интегрируя (2.5), получим

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{const}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) описывает адиабатический процесс (в том числе и необратимый). Уравнение энергии можно также записать с использованием второго начала термодинамики:

$$dQ = d\left(h + \frac{u^2}{2}\right) = TdS, \quad (2.7)$$

где  $S$  и  $T$  соответственно энтропия и абсолютная температура.

### Уравнения сохранения для ударной волны

Из уравнений (2.3) — (2.7) можно получить соотношения для прямой ударной волны. Обозначим индексом «<sub>1</sub>» параметры до ударной волны, а индексом «<sub>2</sub>» параметры за ударной волной. Тогда в системе координат, связанной с ударной волной, получаются

следующие выражения, представляющие собой уравнения сохранения:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (2.8)$$

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (2.9)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (2.10)$$

Эти соотношения необходимо дополнить уравнением состояния, которое в данном случае будем рассматривать в виде уравнения для идеального газа:

$$P = \rho RT. \quad (2.11)$$

Решение системы уравнений (2.8) – (2.10) приводит к следующему известному под названием *адиабата Гюгонио* соотношению для прямой ударной волны:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{V_2}{V_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{V_2}{V_1} - 1}. \quad (2.12)$$

Здесь  $V$  — удельный объем. Соотношение (2.12) можно переписать через число  $M_1$  набегающего потока и соответственно для отношения плотностей «после» и «до» ударной волны:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}. \quad (2.14)$$

Отметим, что представление соотношения параметров на ударной волне через удельный объем (например, формула (2.12)), полезно для анализа так называемых *PV*-диаграмм; что касается расчетов, то удобнее пользоваться соотношениями, выраженными через плотность (формула (2.14)).

Полезно привести также уравнения сохранения для газа, покоящегося перед ударной волной:

$$\rho_1 U_s = \rho_2 (U_s - U_2), \quad (2.15)$$

$$P_1 + \rho_1 U_s^2 = P_2 + \rho_2 (U_s - U_2)^2, \quad (2.16)$$

$$h_1 + U_s^2/2 = h_2 + (U_s - U_2)^2/2. \quad (2.17)$$

Для скорости газа за ударной волной имеем выражение

$$U_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_1 \left( M_s - \frac{1}{M_s} \right), \quad (2.18)$$

индекс “1” относится к параметрам перед ударной волной, индекс “2” относится к параметрам за ударной волной, индекс “s” относится к фронту ударной волны.  $\rho$ ,  $P$ ,  $U$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $M$  – плотность, давление, скорость, энтальпия, скорость звука, число  $M$  соответственно.

## § 2. Постановка задачи

1. Смоделировать стационарное сверхзвуковое обтекание.
2. Провести визуализацию полей числа  $M$ , давления и плотности.
3. Определить отношение этих параметров на ударной волне по оси течения и сравнить их с теоретическими значениями.
4. Определить расхождение вычисленных значений с теоретическими в зависимости от величины *Stability*, например, при значениях от 10 до 0.01, сформировав соответствующую таблицу.

## § 3. Особенности выполнения задания

Поток моделируется в расчетной области созданием одинаковых условий на (левой) границе и начальных условий в поле течения. В начальные и граничные условия входят задания давления, плотности, скорости и показателя адиабаты.

Ударная волна образуется на препятствии при внезапном начале течения (запуск программы). Препятствие помещается в расчетной области, например, в виде цилиндра. Начальные условия с некоторой величиной скорости всегда создают ударную волну (см. главу 7 предыдущего раздела), но при дозвуковой скорости волна уйдет вверх по потоку. То же самое может произойти в случае сверхзвука при большом перекрытии сечения цилиндром. Это так называемое запираение течения будет зависеть и от граничных условий на боковой стенке.

### Глава 3. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ СОПЛА

Сопло *Лавалья* представляет собой устройство, предназначенное для перевода газа из состояния покоя к сверхзвуковому течению. Устройство состоит из начальной суживающейся (конфузорной) части и выходной расширяющейся (диффузорной) части. Сечение, отделяющее конфузорную и диффузорную части, называется критическим сечением. Начальный дозвуковой поток в суживающейся части ускоряется до скорости звука, которая достигается в критическом сечении, затем в расширяющейся части происходит ускорение потока и может быть достигнута сверхзвуковая скорость.

В *реальном* осесимметричном сопле Лавалья даже в случае течения идеального газа движение является двумерным. Это приводит к тому, что в каждом поперечном сечении сопла параметры газа поперек потока непостоянны. Поэтому на практике важной задачей является правильное профилирование сопла, что позволяет обеспечить максимальную однородность потока на выходе из сопла. Далее будем рассматривать модель одномерного адиабатического и изэнтропического течения идеального газа в сопле Лавалья [3, 4, 6, 8].

#### § 1. Основные соотношения

Будем рассматривать модель стационарного течения идеального газа в канале переменного течения в предположении, что линии тока параллельны оси канала. В этом случае система уравнений неразрывности, движения и энергии имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} &= 0, \\ \rho u du &= -dp, \\ dh + u du &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь  $A$  — площадь канала,  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$  — соответственно плотность, скорость и давление газа,  $h = C_p T$  — энтальпия идеального газа ( $T$  — температура,  $C_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}$  — теплоемкость газа с посто-

янным показателем адиабаты  $\gamma$  при постоянном давлении). Эти уравнения дополняются уравнением состояния (Менделеева–Клапейрона):

$$p = \rho RT. \quad (3.2)$$

Для изоэнтропического течения идеального газа справедливо уравнение

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (3.3)$$

которое называется адиабатой Пуассона.

Из уравнений (3.1) – (3.3) можно получить соотношение, называемое *соотношением Гюгоню*, которое связывает изменение скорости потока  $u$  в сопле с изменением площади сечения  $A$ :

$$(M^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dA}{A}. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.4) видно, что в случае сопла Лаваля, т. е. если  $M < 1$ , знак  $du$  противоположен знаку  $dA$ . Поэтому при дозвуковом движении газа в сопле, также, как и в случае течения несжимаемой жидкости, при возрастании площади сечения трубы скорость потока уменьшается и, наоборот, при уменьшении сечения скорость увеличивается.

При изоэнтропическом течении идеального газа давление, плотность и температура газа связаны с начальными значениями, соответствующими состоянию покоя (обозначаются индексом "0" и иногда называются параметрами торможения) посредством соотношений:

$$\frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1}, \quad (3.5)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (3.7)$$



Таким образом, если известны параметры торможения и число Маха потока, то остальные термодинамические величины рассчитываются по формулам (3.5) – (3.7).

Аналогично этим формулам в одномерной постановке можно получить соотношение между площадью сечения сопла и числом Маха в заданном сечении:

$$\frac{A_*}{A} = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} M \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (3.8)$$

Для воздуха ( $\gamma = 1.4$ ) из формулы (3.8.) имеем

$$\frac{A}{A_*} = 1.728 \cdot M \cdot (1 + 0.2M^2)^{-3}. \quad (3.9)$$

В этих формулах  $A_*$  — площадь минимального (критического) сечения сопла. Приведенные трансцендентные алгебраические уравнения (3.8) и (3.9) устанавливают явную связь изменения числа Маха вдоль оси сопла с изменением площади текущего сечения.

## § 2. Постановка задачи

Цель работы — смоделировать течение в сверхзвуковом осесимметричном сопле Лавала. Параметры сопла:

- число  $M$  — задается;
- статическое давление на срезе — 1 атм;
- неоднородность давления на срезе по радиусу сопла не более 20%.

## § 3. Задание и особенности его выполнения

### Начальные и граничные условия

Возможная конфигурация расчетной области приведена на рис. 3.1 для размера  $180 \times 600$  ячеек. В области 1 целесообразно задать начальную скорость для ускорения установления течения после начала счета, в противном случае значительное время потребуются для выталкивания стоящего воздуха.

Давление и скорость на границе слева (область 2) должны подбираться, от этого зависят параметры в сопле. Целесообразно провести оценки давления, плотности и скорости исходя из отношения сечений в областях 2 и 1.

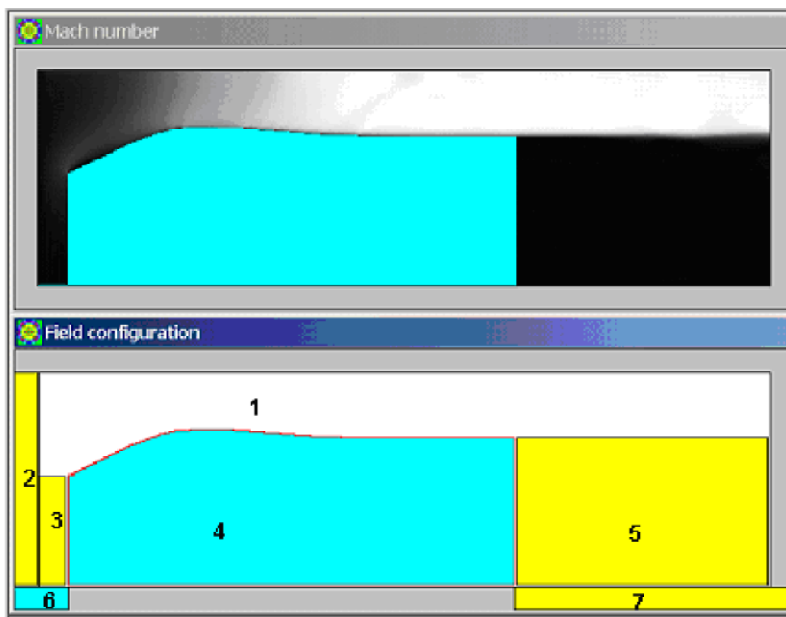


Рис. 3.1. Примерное поле чисел  $M$  и конфигурация расчетной области для задачи о течении в сопле

Т а б л и ц а 3.2

**Расчетные области и значения параметров, задаваемых в них**

№	Области на рис. 3.1	$P$	$\rho$	$u$	$v$	$\gamma$
1	Начальные параметры воздуха в сопле	1	1.29		0	1.4
2	Граничное условие слева				0	1.4
3	Начальные параметры на входе по периферии сопла	1	1.29	0	0	1.4
4	Профилированное сопло	Твердое тело				
5	Начальные параметры на выходе по периферии сопла	1	1.29	0	0	1.4
6	Граничное условие	Твердое тело				
7	Граничное условие	1	1.29	0	0	1.4

Должны быть заполнены пустые ячейки.

Начальные параметры в области 5 могут быть атмосферными. Введение буферной области 3 является целесообразным для формирования течения на входе в сопло.

### Параметры расчета

Основными параметрами численного расчета является число шагов и параметр Stability.

Для приведенной конфигурации может оказаться целесообразным использование двух стадий. На первой стадии Step count — 1000, Stability — 1.00. Затем значение Stability целесообразно уменьшать для ускорения счета, но до тех пор, пока не наблюдается неустойчивость схемы.

## § 4. Представление результатов

В процессе расчета вывести окна визуализации чисел  $M$ , давления и их профили на срезе сопла и вдоль него. В соответствии с одномерной теорией (формулы (3.1) – (3.9)) рассчитать распределение всех параметров по длине сопла.

Результаты расчетов по теории и данные численного моделирования необходимо свести в единую таблицу (см. таблицу 3.2) и провести сравнение теории и численного эксперимента. Например, с использованием одного из доступных графических пакетов провести сравнение числа  $M$  на оси сопла.

Т а б л и ц а 3.3

### Параметры на оси сопла

$X$	$R$	$A^*/A$	$M(A)$	$M(\text{потока})$
0				

В процессе обработки расчетных данных необходимо получить рисунок, аналогичный рис. 3.2.

Необходимо обратить внимание на то, что ускорение потока происходит в веере волн разрежения при обтекании выпуклой поверхности аналогично обтеканию тупого угла в течении Прандтля–Майера. Этим процессом определяется и выпуклая к оси форма изолиний  $M$  на этапе ускорения.

Нужно представить соображения о том, почему это происходит и как затем выравнивается поле скоростей.

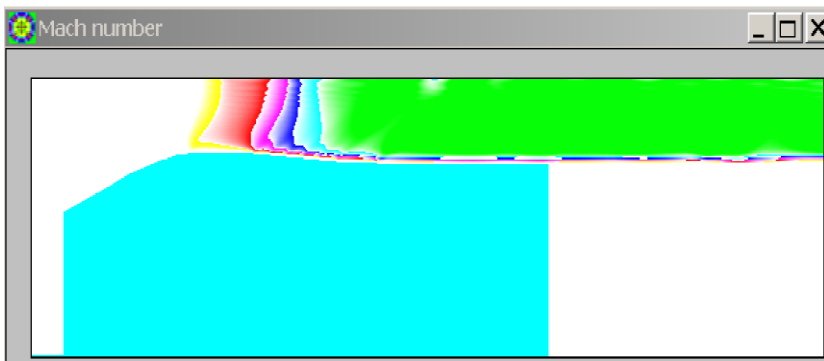


Рис. 3.2. Пример поля чисел  $M$  в шестиступенчатой палитре. Первая граница 0.9, вторая — 1, третья — 1.1, четвертая — 1.2, пятая — 1.35, за шестой (зеленым)  $M$  больше 1.5

## Г л а в а 4. СВЕРХЗВУКОВОЙ ДИФФУЗОР

Основное назначение сверхзвукового диффузора состоит в превращении кинетической энергии набегающего сверхзвукового потока в потенциальную энергию давления, т. е. в обеспечении торможения сверхзвукового потока с максимальным увеличением давления. Из первого начала термодинамики следует — чем меньше температура заторможенного потока, тем больше давление. Из второго начала термодинамики следует, что хороший диффузор — это тот, где меньше растет энтропия и соответственно температура.

Одним из важных практических применений сверхзвукового диффузора (СД) является использование его в качестве элемента входной части прямоточного реактивного двигателя (ПРД), состоящего из входной части, включающей СД, средней части — камеры сгорания и выходной части — сопла Лавала. В СД набегающий сверхзвуковой поток сжимается для повышения интенсивности горения топлива, подводимого в камеру сгорания через форсунки. Скорость и температура сгорания увеличиваются с увеличением давления при той же начальной температуре. Кроме того, увеличивается плотность и тяга при тех же габаритах двигателя.

Самый простой вид диффузора — труба с шайбой (сужением) на конце таким, чтобы перед ней образовалась отошедшая ударная волна, тормозящая поток. Это вариант с наибольшим ростом энтропии.

В непрофилированном диффузоре (трубе) потери полного давления максимальны и при числе Маха  $M = 3$  могут составлять около трех раз. Оптимальным решением является профиль, при котором реализуется серия косых скачков уплотнения с замыкающим прямым скачком внутри диффузора.

Численное моделирование течения в сложном сверхзвуковом диффузоре можно проверять только экспериментально, теория в таких сложных течениях позволяет анализировать лишь общие подходы к решению задачи.

### § 1. Потери полного давления в ударной волне

Термин «потери полного давления» означает, что газ, истекающий из объема при давлении  $P_0$  (рис. 3.3), при последующем торможении имеет давление, восстанавливает полностью свое давление.

Потери полного давления непосредственно связаны с ростом энтропии вследствие перехода энергии от нагретых слоев к холодным в ударной волне и выражаются в том, что при торможении газа его давление восстанавливается не полностью.

Самым типичным примером может служить ресивер с сверхзвуковым соплом и насадок полного давления в потоке, истекающем из сопла (см. рис. 3.3).

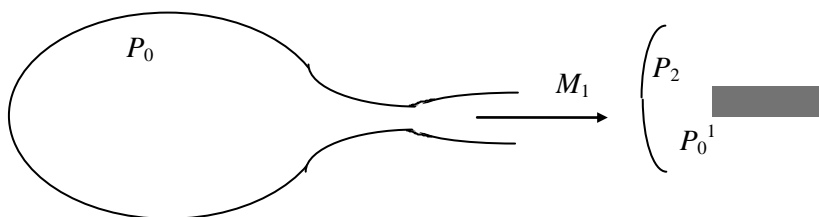


Рис. 3.3. Иллюстрация потерь полного давления при сверхзвуковом истечении

При  $M_1 > 1$  перед насадком полного давления образуется ударная волна и потери соответственно. Потери (коэффициент восстановления давления) определяются, как отношение  $\frac{P'_0}{P_0}$  и могут быть рассчитаны следующим образом.

Статическое давление в потоке с числом  $M_1$  определяется по формуле для изоэнтропического потока:

$$P_0 = P_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (4.1)$$

Здесь и далее индекс «2» относится к параметрам за прямым скачком уплотнения.

Давление  $P_2$  и число  $M_2$  за отошедшей от насадка ударной волной определяется по соотношениям для прямых скачков уплотнения:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (4.2)$$

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}. \quad (4.3)$$

Рост давления от ударной волны до точки торможения (на насадке) рассчитывается по формуле (4.1). Обычно это давление обозначается, как  $P'_0$ :

$$P'_0 = P_2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (4.4)$$

Таким образом, получаем следующее соотношение для  $\frac{P'_0}{P_0}$ :

$$\frac{P'_0}{P_0} = \left[ \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left( \frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (4.5)$$

На рис. 3.4 представлена зависимость коэффициента восстановления давления от числа  $M$  потока. Видно, что для  $M > 3$  и особенно для гиперзвука эта величина очень существенна.

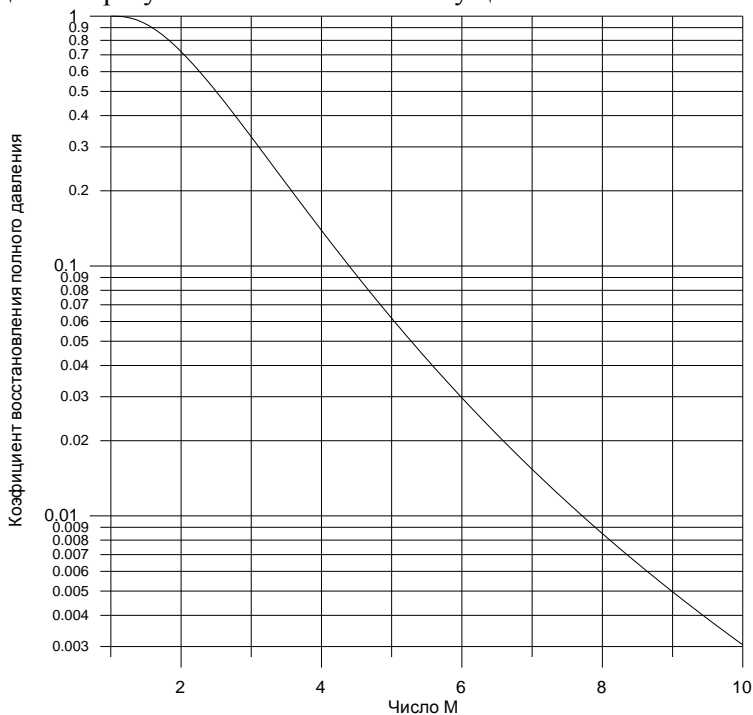


Рис. 3.4. Коэффициент восстановления полного давления за прямым скачком уплотнения

## § 2. Постановка задачи

Задача состоит в моделировании диффузоров различных типов и определении эффективности их работы в сравнении с предельными теоретическими значениями.

Следует иметь в виду, что и дозвуковой и сверхзвуковой диффузор просчитываются плохо и теоретически и численно. Это тот случай, когда критерием может быть только эксперимент. Основной причиной трудности расчета является возможный отрыв течения от стенок при течении с увеличением статического давления. В пограничном слое, где скорость потока мала а статическое

давление растет, возникает возвратное течение (отрыв) и меняется сечение основного потока. Некоторые примеры таких дозвуковых течений представлены в главе 5.

### § 3. Моделирование диффузора

В качестве первого варианта предлагается сконструировать *прямой диффузор* в виде трубы, расположенной вдоль потока.

Для того чтобы перед входом в трубу образовалась ударная волна, в конце трубы помещается центральное тело. Если центральное тело сделать слишком большим, то образуется выбитый (отошедший) скачок уплотнения, и расход газа в диффузоре существенно упадет. Надо сделать так, чтобы практически весь расход попал в трубу и необходимо зарегистрировать давление на центральном теле. Отношение давления в точке торможения на центральном теле к рассчитанному по статическому давлению и числу  $M$  набегающего потока по формуле (4.5) и будет характеризовать коэффициент восстановления диффузора.

*Диффузор с косыми скачками* обеспечивает более высокий коэффициент восстановления. В качестве основы такого диффузора можно использовать конфигурацию, приведенную на рис. 3.5. Примерные параметры для его конструирования следующие:

**Размер поля**  $500 \times 180$  ячеек, размер ячейки  $0.01$  м с плоской геометрией.

#### **Начальные и граничные условия**

В поле течения давление  $P = 1$ , давление задается в атмосферах ( $101\,325$  Па), плотность  $\rho = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>, скорость по оси  $x$   $u = 1000$  м/с.

Граничное условие слева отсутствует, т. к. поток сверхзвуковой. Граничные условия справа, сверху и снизу отсутствуют (свободная поверхность).

**Координаты** для построения поверхностей приведены в таблице 3.4.

#### **Параметры счета**

*Step count* — 1000, *Stability* — 0.5; *append step: Step count* — 10 000, *Stability* — 0.3.



**Координаты для построения поверхностей**

Диффузор, верхняя часть		Диффузор, нижняя часть		Центральное тело		Трассер	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
450	70	350	130	455	94	454	96
500	35	400	125	455	98		
486	20	460	125	460	98		
10	20	500	160	460	94		
77	28	207	130				
130	40						
200	70						

**§ 4. Представление результатов**

Последовательность операций для регистрации давления:

Главное меню — *Window* — *Tile horizontal*. В окне *Field configuration* общая картина фиксируется по давлению в поле течения: меню *View* — *Parameters* — *Max number* — *Base value* — *OK* — окно *Parameter* — *Palette* — min 0, max 3.

Временная зависимость давления перед телом в диффузоре (для регистрации давления торможения) регистрируется с помощью трассера (*View* — *Tracer*):

Если график не умещается по длине в окне, то следует в меню *Tracer* выбрать *Scale* больше 1.

На рис. 3.5 представлены пример записи давления на центральном теле, полученный с помощью трассера, и картина течения на 7400 шаге, когда устанавливается течение, близкое к стационарному.

Основным результатом является представление о характерном облике диффузора и о сложной настройке режимов его работы. Количественное сравнение может быть проведено по следующим показателям:

1. Коэффициент восстановления в диффузоре.
2. Пределы устойчивости работы диффузора по числу М.

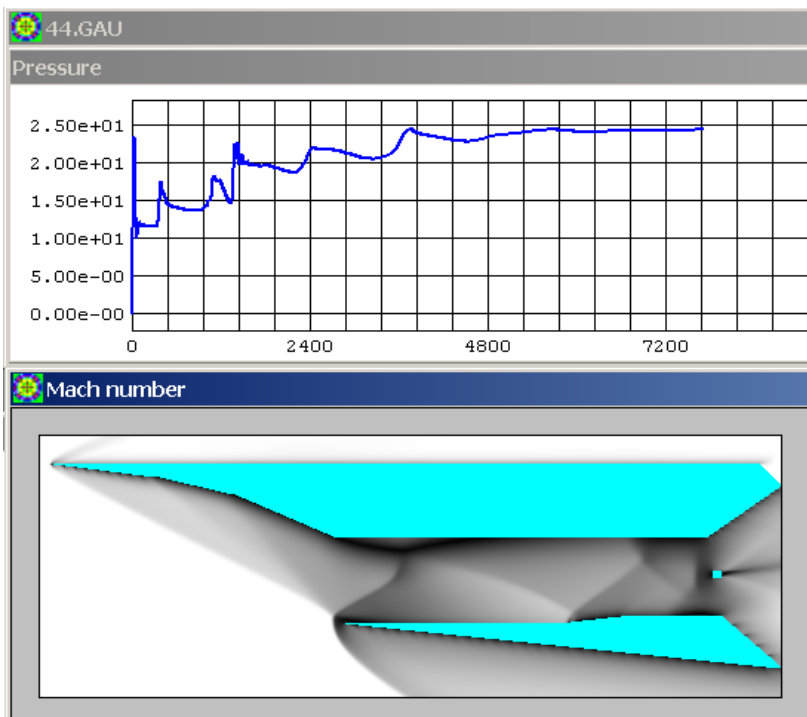


Рис. 3.5. Давление вблизи оси цилиндра от времени (один шаг  $3.33 \cdot 10^{-6}$ с) (верхний рисунок); визуализация поля давлений перед телом на 7400 шаге (нижний рисунок)

## Г л а в а 5. УДАР ВОЗДУХА О ТОРЕЦ ПЛАСТИНЫ

Теоретические соотношения для данной задачи, которая ниже решается с использованием пакета GDT, приведены в разделе 2, главе 7, где приводится технология решения аналогичной задачи с использованием пакета Flow Vision

### § 1. Моделирование в Gas Dynamics Tool

GDT эффективно решает сверхзвуковые течения, а применительно к слабому удару дает большие схемные пульсации; их, на начальном этапе, можно уменьшить специальными мерами.

Предлагается использовать следующие параметры расчета:

**Пространственная сетка**

Размер поля 180×180 ячеек, размер ячейки 0.01 м с осевой геометрией.

### **Начальные и граничные условия**

В поле течения давление  $P = 1$ , давление задается в атмосферах (101 325 Па), плотность  $\rho = 1.29 \text{ кг/м}^3$ , скорость  $u = 11.6 \text{ м/с}$ .

Граничное условие слева —  $P = 1$ ,  $\rho = 1.29$ ,  $u = 11.6$

Граничные условия справа и снизу отсутствуют.

(правая кнопка мыши) — *add body*

Тело (цилиндр) имеет координаты:

$$x = 180, y = 1$$

$$x = 175, y = 1$$

$$x = 175, y = 80$$

$$x = 180, y = 80$$

(правая кнопка мыши) — *add gas*

Перед телом устанавливается «амортизатор» для частичного подавления неустойчивости схемы, это воздух с давлением  $P = 1$ , плотностью  $\rho = 2$  и координатами:

$$x = 175, y = 1$$

$$x = 172, y = 1$$

$$x = 172, y = 80$$

$$x = 175, y = 80$$

### **Параметры расчета**

*View* — *Script* — (правая кнопка мыши) *insert step* — *Step count* — 1000, *Stability* — 0.3.

## **§ 2. Представление результатов**

Последовательность операций для вывода значений давления.

Главное меню — *Window* — *Tile*. В окне *Field configuration* общая картина фиксируется по давлению в поле течения: *Parameters* — *Pressure* — *Base value* — *OK* — *Parameter* — *Palette* — min 0.99, max 1.06.

На рис. 3.6 представлено поле давлений на 740 шаге, или через 0.00246 с с момента начала движения. Видна зона распространения веера волн разрежения к оси потока (темный диск с центром на кромке цилиндра). Вертикальная рябь — следствие неустойчивости численной схемы.

Временная зависимость давления перед телом регистрируется с помощью трассера (*View — Tracer*): (правая кнопка мыши) — *Add tracer* — точка с координатами  $x = 174$ ,  $y = 5$ , *File Name*.

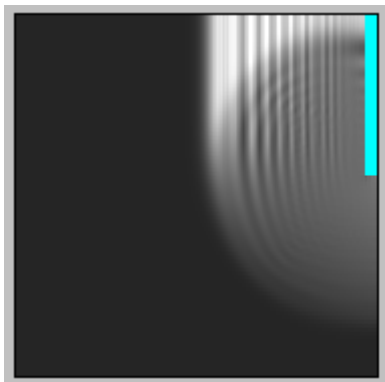


Рис. 3.6. Визуализация поля давлений перед телом на 740 шаге

Если в начале регистрации график начинается с «0», то нужно перезапуститься, используя команды *Stop* и *Restart* в меню *Execute*.

Если график не умещается по длине в окне, то следует в меню *Tracer* выбрать *Scale* больше 1.

При соблюдении указанных параметров давление в точке положения трассера и качественная зависимость могут быть определены достаточно хорошо. Параметры можно изменять, сопоставляя получаемые результаты. При полностью устойчивой расчетной схеме трассер должен показывать почти прямоугольную «полку» без выбросов. Для того чтобы легче было интерпретировать полученные данные, нужно после окончания записи подобрать ось ординат трассера таким образом, чтобы значения на ней не повторялись.

На рис. 3.7 представлена характерная запись давления трассером вблизи поверхности на оси при моделировании слабого удара.

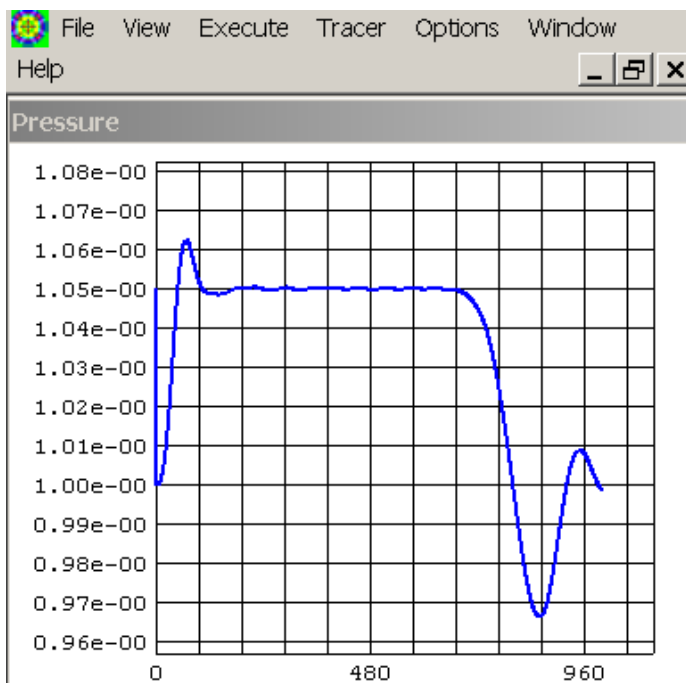


Рис. 3.7. Давление вблизи оси пластины как функция времени (один шаг  $3.33 \cdot 10^{-6}$  с)

### Анализ результатов

Необходимо провести сопоставление численных и теоретических значений в начальной фазе удара, а также время продолжительности постоянного давления («полки»).

Определить давление для установившегося потока можно только по теории, в чем нетрудно убедиться, продолжив счет далее. Причиной является развивающаяся неустойчивость и трудности в задании граничных условий.

Т а б л и ц а 3.5

### Расчет и сравнение с теорией давления при ударе

	Теория	Расчет
Давление при ударе, $\Delta P$ (Па)		
Время воздействия на оси, с		
Стационарное значение давления, $\Delta P$ (Па)		

## Г л а в а 6. ТЕЧЕНИЯ С ПОДВОДОМ ТЕПЛА И ДЕТОНАЦИЯ (GDT)

### § 1. Основные соотношения

#### Подвод тепла

Течения с подводом тепла имеют место, например, при любом горении или конденсации. Горение может переходить при этом в детонацию (взрыв). С отводом тепла дело обстоит сложнее. Реально это отвод тепла со стенок или через охлаждаемые решетки.

Описание течения с подводом (отводом) тепла в одномерном случае производится следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}d(\rho u) &= 0, \\ udu + \frac{dp}{\rho} &= 0, \\ udu + dh &= udu + \frac{2ada}{\gamma-1} = dQ, \\ P &= \rho RT.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Для решения задачи нужно исключить из уравнений  $P$ ,  $\rho$ , оставив  $u$ ,  $a$ ,  $M$ ,  $Q$ . Выразим уравнение состояния через  $a$ :

$$d\left(\frac{\gamma P}{\rho}\right) = 2ada = \frac{\gamma}{\rho} dP - \frac{\gamma P}{\rho^2} d\rho.\tag{6.2}$$

Из уравнения неразрывности:

$$2ada = \frac{\gamma}{\rho} dP + \frac{a^2}{u} du.\tag{6.3}$$

Подставляем выражение  $dP$  из уравнения импульсов:

$$2ada = -\gamma udu + a^2 \frac{du}{u}.\tag{6.4}$$

Подставляем это выражение в уравнение энергии:

$$\begin{aligned}
 (\gamma-1)udu - \gamma u du + a^2 \frac{du}{u} &= 2(\gamma-1)dQ \Rightarrow -udu + a^2 \frac{du}{u} = 2(\gamma-1)dQ \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (1-M^2) \frac{du}{u} = \frac{(\gamma-1)}{a^2} dQ. \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Из (5) следует характер изменения параметров при теплоподводе:

$$\begin{aligned}
 dQ > 0, \quad M > 1, \quad du < 0, \\
 dQ > 0, \quad M < 1, \quad du > 0, \\
 dQ < 0, \quad M > 1, \quad du > 0, \\
 dQ < 0, \quad M < 1, \quad du < 0.
 \end{aligned}$$

Интегральные изменения параметров легче всего получить из интеграла уравнения импульсов, который от тепла не зависит:

$$P + \rho u^2 \Rightarrow P(1 + \gamma M^2) = \text{const}, \text{ значит}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{P_2}{P_1} &= \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}, \\
 \frac{T_2}{T_1} &= \left( \frac{M_2}{M_1} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2. \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

В переменных  $P, V$  выражение выглядит так:

$$P + u_1^2 V / V_1^2 = P_1 + u_1^2 / V_1.$$

Всегда ли  $T$  растет с подводом тепла? Найдём  $dT/dQ$ , для этого берём уравнение энергии:

$$\begin{aligned}
 u du + c_p dT = dQ \Rightarrow c_p \frac{dT}{dQ} = 1 - u \frac{du}{dQ} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{dT}{dQ} = \frac{1}{c_p} \frac{1 - \gamma M^2}{1 - M^2}. \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Получается, что в интервале  $\frac{1}{\gamma} < M^2 < 1$  при подводе тепла температура в потоке падает, при  $M = 1$   $dQ/dT$  меняет знак. Последнее означает, что подвод тепла в дозвуковой поток ускоряет его, а сверхзвуковой поток для ускорения нужно охлаждать.

### Детонация

Обычно выделение тепла в газе происходит при горении. Процесс обычного горения — это диффузионный процесс. Извест-

но, что всякую горючую смесь надо поджигать, т. к. химическая реакция начинается при определенной температуре ввиду экспоненциальной зависимости скорости химической реакции от температуры. Обычно пламя распространяется со скоростью до 10–20 м/с за счет теплопроводности и диффузии активных центров из горячей зоны. Например, скорость распространения пламени для смесей углеводородов и воздуха составляет около 0.4 м/с, для воздушно-водородных смесей до — 3 м/с, для кислородно-водородных смесей — 12 м/с. Если же пустить по газу ударную волну, то может получиться, что она нагреет газ достаточно для быстрого горения, и горение будет поддерживать ударную волну, которая распространяется в интервале скоростей 1500–3500 м/с.

Рассмотрим вопрос о том, когда достигается стационарный процесс горения за ударной волной, т. е. детонации. В системе координат, связанной с ударной волной, поток за ней дозвуковой. Если в нем происходит реакция с выделением тепла, то поток будет ускоряться, давление при этом будет падать, температура в воздухе при  $M < 0.71$  растет, а при  $M > 0.71$  падает. Сколько бы мы тепла не подводили, разогнать поток можно только до  $M = 1$ . *Подвод количества тепла, достаточного для разгона потока за ударной волной до  $M = 1$ , соответствует детонационному пределу по  $\Delta Q$ . Увеличение  $\Delta Q$  приводит к ускорению ударной волны.*

## **§ 2. Оценки параметров и диаграммное представление**

Оценки параметров возникновения детонационной структуры проводим в системе координат, связанной с ударной волной. Здесь имеются два значения: параметры возникновения и параметры распространения.

По соотношениям (6.5), (6.6) можно для заданных параметров набегающего потока с зоной энерговыделения определить параметры в ее конце, параметры записания течения и начала процесса детонации. Порог записания течения соответствует условию, что в конце зоны энерговыделения число  $M$  потока равно единице. При записании течения начинает формироваться ударная волна. Расчеты могут быть произведены введением перед зоной энерговыделения установившейся ударной волны, при этом энерговыделение происходит в дозвуковой поток, разгоняя его до числа  $M = 1$ .



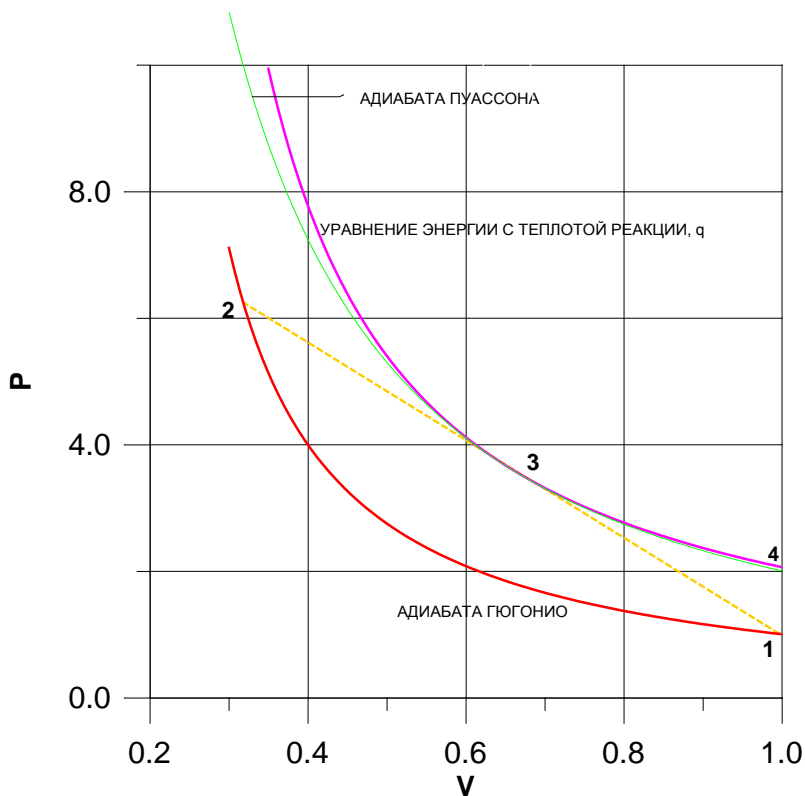


Рис. 3.8. Адиабаты для случая детонации

- 1 — параметры, соответствующие начальному состоянию перед ударной волной;
- 2 — параметры за ударной волной перед началом химической реакции;
- 3 — точка касания, соответствующая параметрам за ударной волной с зоной горения (детонационной волной)

Адиабата Гюгонии соответствует нереагирующему газу перед ударной волной. Адиабата Гюгонии с теплотой реакции соответствует предыдущей адиабате с добавлением теплоты реакции « $q$ ». Индексы «1», «2», «3» относятся к набегающему потоку, потоку за ударной волной и потоку за зоной энерговыделения соответственно (см. диаграмму).

$q$  — величина энерговыделения.

Уравнения, описывающие приведенные графики, следующие. Из уравнений неразрывности и импульсов скорость потока ( $u_1$ ), набегающего на детонационную волну, определяется выражением

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}. \quad (6.8)$$

Выражение для скорости потока ( $u_3$ ) за детонационной волной:

$$u_3^2 = V_3^2 \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}. \quad (6.9)$$

Прямая 1–2 соответствует изменению параметров в ударной волне:

$$P = 1 + u_1^2(1 - V/V_1)/(P_1 V_1). \quad (6.10)$$

Для понимания диаграммы важно определить скорость звука в окрестности точки (3)  $PV$ -диаграммы:

$$\frac{dP_3}{dV_3} = -\frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2} \Rightarrow \frac{\gamma P_3}{\rho_3} = \gamma P_3 V_3 = a_3^2 = \frac{dP_3}{d\rho_3} = \frac{dP_3}{d\left(\frac{1}{V_3}\right)} = V_3^2 \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}. \quad (6.11)$$

Касание адиабаты Пуассона и прямой 1–2 означает, что в точке касания производная энтропии по прямой 1–2 равна нулю и соответственно производная  $dP/d\rho$  в этой точке соответствует скорости звука:  $a^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s$ . Эта точка (3) на рис.3.8 (точка Чепмена–

Жуге) соответствует параметрам потока за детонационной волной.

Оказывается, что в этой же точке происходит касание прямой 1–2 и адиабаты Гюгонио с теплотой реакции  $q$  (11), что и видно на рис. 3.8. Это обстоятельство позволяет легко определять величину  $q$  в зависимости от скорости ударной волны.

Адиабата Гюгонио выражается в следующем виде:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{V}{V_1}}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{V}{V_1} - 1}. \quad (6.12)$$

Уравнение энергии, выраженное через энтальпию и скорость:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_3 + \frac{u_3^2}{2} - q. \quad (6.13)$$

Уравнение энергии с теплотой реакции  $q$  в переменных  $P$  и  $V$ :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{V}{V_1} + \frac{2q}{P_1 V_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{V}{V_1} - 1}. \quad (6.14)$$

При подводе тепла в поток с числом  $M_1$  для расчета энергии, необходимой для разгона (торможения) потока до  $M_2$ , можно воспользоваться следующей формулой:

$$q = \frac{a_1^2}{\gamma-1} \left( \left( \frac{M_2}{M_1} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right) - \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \right). \quad (6.15)$$

Результаты, полученные по формуле (15), можно сопоставлять с расчетами по GDT при подводе тепла в поток.

Диаграммное решение задачи о параметрах детонационной волны осуществляется графически следующим образом (начальные параметры для воздуха при начальном давлении 1 атм и температуре 273 К):

1. Задается энерговыделение,  $q$ , при этом строятся кривые по уравнениям (6.12) и (6.14).
2. Задается скорость ударной волны и строится прямая по уравнению (6.8).
3. Увеличивается или уменьшается скорость ударной волны до тех пор, пока график прямой (6.8) не коснется графика кривой (6.14). В случае касания скорость ударной волны соответствует скорости детонационной волны.

Теоретическое диаграммное решение прилагается и его можно сравнивать с численным.

На рис. 3.9 представлено меню в исполняемом файле, цвета соответствуют рис. 3.8. Изменение параметров производится либо введением новых значений скорости и тепловыделения, либо активизацией меню «Продолжение расчета», в этом случае при каждом нажатии меню скорость будет увеличиваться на 10 м/с. Следует иметь ввиду, что касание двух кривых при конечной толщине осуществляется при их слиянии в месте касания.

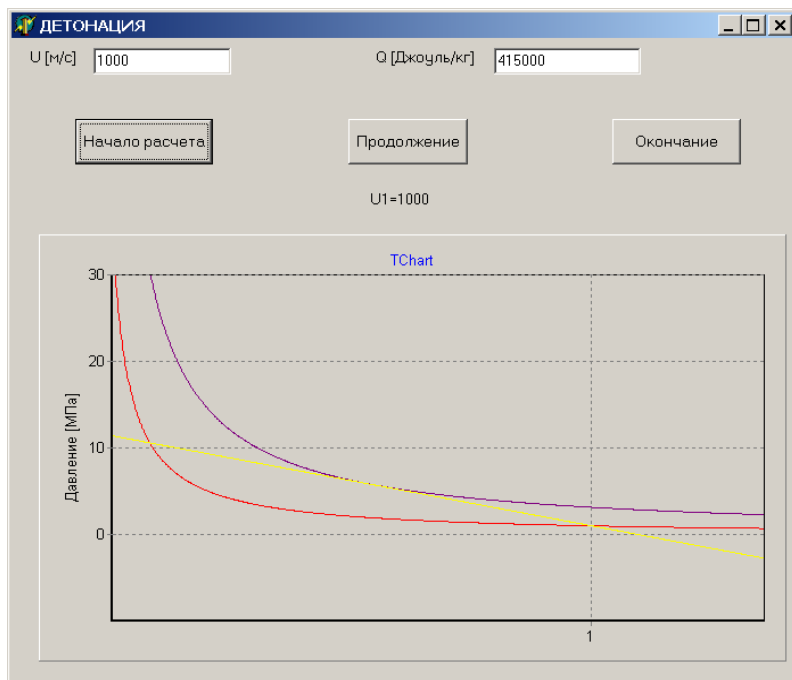


Рис. 3.9. Программа для диаграммного представления

### § 3. Постановка задачи

Установка параметров программы GDT:

- Конфигурация двухмерная, длина 650 ячеек, высота -3 ячейки, размер ячейки 1 м.
- Тепловыделение PSE задается в системе СИ как величина энергии в джоулях, выделяемая в одной ячейке (1 м) в секунду в течение времени от *Start time* до *Finish time* ( $\Delta t$ ), с дискретизацией по времени *tau*.

Если тепловыделение происходит в движущийся поток, то в единице массы будет выделяться энергия (при  $\Delta t > L/U$ )

$$q = \frac{PSE \cdot L}{\rho \cdot U}, \quad (6.16)$$

где  $L$  — длина зоны энерговыделения (число метровых ячеек);  $\rho$ ,  $U$  — плотность и скорость на входе (граничные условия). В случае

установившегося течения в канале постоянного сечения вдоль него  $\rho U = \text{const}$  и вклад энергии в единицу массы не зависит от изменения плотности или скорости.

### **Вариант 1**

- Скорость — 1000 м/с, давление — 1 атм, плотность — 1.29 кг/м<sup>3</sup>.

- Граничные условия: сверху и снизу стенки, слева (на входе), скорость — 1000м/с, давление — 1 атм, плотность — 1.29 кг/м<sup>3</sup>, на выходе — свободная граница (условий нет).

- Производится энерговыделение в сверхзвуковой поток до уровня близкого к критическому ( $M = 1$ ). Эта величина по теории соответствует уровню энергии при возникновении детонации.

- Зона тепловыделения:

- Координаты:  $x = 50\text{--}550$ ,  $y = 1\text{--}3$ , start time = 0, finish time = 7.5, tau =  $10^{-2}$ , PSE =  $7.203 \cdot 10^5$ .

- Параметры счета:

- Число шагов — 15 000, Stability — 0.2

- Параметры потока ( $M$ ,  $P$ ,  $\rho \cdot U$ ) в программе соответствуют теоретическим значениям.

- Программа хорошо передает параметры потока при наличии энерговыделения, величина которого зависит от длины расчетной зоны, но не приближается к расчетному значению энерговыделения. Основная причина заключается в неадаптированной сетке и расчетной схеме. В той или иной степени такие расхождения характерны для всех программных пакетов, и в каждой области применения необходима аттестация или тестовые расчеты.

### **Вариант 2**

- В режиме детонации расхождения увеличиваются и тем не менее мы приводим рекомендуемые параметры моделирования, поскольку качественная картина возникновения детонации и параметры потока передаются достаточно хорошо.

- Скорость — 1000 м/с, давление — 1 атм, плотность — 1.29 кг/м<sup>3</sup>.

- Граничные условия: сверху и снизу стенки, слева (на входе), скорость — 1000м/с, давление — 1 атм, плотность — 1.29 кг/м<sup>3</sup>, на выходе — свободная граница (условий нет).

- Первичная зона тепловыделения:

Координаты:  $x = 110-610$ ,  $y = 1-3$ , start time = 0, finish time = 2,  $\tau = 10^{-2}$ , PSE =  $2 \cdot 10^6$ .

- Вторичная зона тепловыделения:

Координаты:  $x = 100-600$ ,  $y = 1-3$ , start time = 2, finish time = 10,  $\tau = 10^{-2}$ , PSE =  $3.5 \cdot 10^5$ .

- Параметры счета:

Число шагов — 20 000, Stability — 0.2

Координаты зон тепловыделения сдвинуты для того, чтобы можно было ими управлять порознь. Первичная зона нужна для образования детонационной волны, а вторичная — для ее стабилизации (получения постоянной во времени картины).

#### § 4. Представление результатов

Целесообразно выводить следующие параметры: давление, поскольку оно определяет воздействие на среду и объект, число  $M$ , которое определяет качественные особенности течения, а также плотность и скорость для определения расхода. Предлагается выводить графические зависимости параметров.

Полученные результаты необходимо сравнить между собой, заполнив следующую таблицу:

Т а б л и ц а 3.6

#### Сравнение с теорией параметров расчета при течении с подводом тепла

Параметр	$M$ набегающего потока	$M$ в конце зоны тепловыделения	Отношение давлений на ударной волне	Расход в конце зоны тепловыделения	Тепловыделение, дж/кг
Теория	3.012				
Вариант 1	3.012				
Вариант 2	3.012				

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии описаны математические модели и численные методы, используемые в учебных версиях ППП Flow Vision и Gas Dynamics Tool. Предложены рекомендации студентам по решению классических задач, связанных с изучением газо- и гидродинамических явлений.

Описанные рекомендации и задания обладают достаточной универсальностью, чтобы применяться к широкому кругу учебных дисциплин многих вузов — от фундаментальной гидродинамики, где основной упор делается на теоремы, до чисто прикладных — гидравлики и газодинамики, где рассматриваются готовые решения задач и эмпирические правила расчетов практически значимых величин.

Пособие позволяет в более короткие сроки освоить программные пакеты и использовать их не только в образовательных целях, но и для выполнения научно-исследовательских работ.

В целом, основываясь на опыте внедрения методики в МФТИ, мы надеемся на ее использование и в других вузах. Как показал опыт, методика полезна не только для будущих специалистов в области МЖГ, но и для других естественнонаучных специальностей.

Просьба к читателям присылать отзывы, предложения, замечания, по адресу: г. Долгопрудный Московской области, Институтский переулок д. 9, МФТИ, кафедра прикладной механики, mberez@newmail.ru. Все предложения будут непременно учтены в последующих изданиях.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА И ПЛАСТИНЫ

Задача обтекания произвольного контура плоским стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости успешно решается с помощью методов теории функций комплексного переменного, который получил название *метода конформного отображения*. Этот метод позволяет решить задачу о плоском обтекании произвольного контура на основании решения об обтекании кругового цилиндра, если известно конформное отображение внешности этого контура на внешность круга.

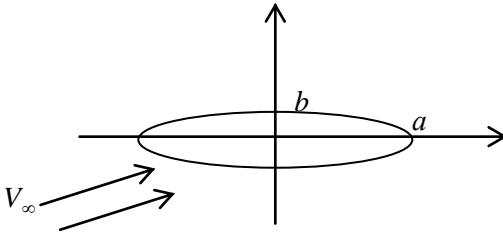


Рис. П.1. Обтекание эллиптического цилиндра

**Условие задачи.** Стационарный поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает эллиптический цилиндр (с полуосями  $a$  и  $b$ ), большая полуось которого находится под заданным углом атаки ( $\alpha$ ) к направлению потока; скорость жидкости на бесконечно большом расстоянии от цилиндра —  $V_\infty$  (рис. П.1.). Важным предельным случаем является обтекание пластины (эллиптический цилиндр с  $b = 0$ ).

*Обтекание пластины*

В плоскости  $z = 0$  имеем отрезок  $[-a, a]$ , на который под углом  $\alpha$  набегаёт поток, скорость на бесконечности которого равна  $V_\infty$  (рис. П.2) [10].



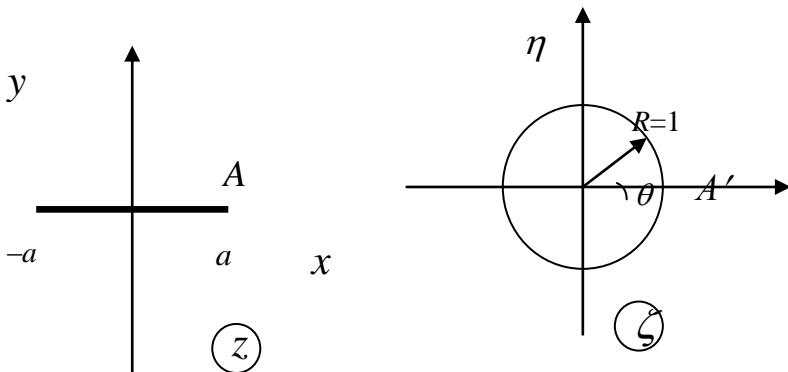


Рис. П.2. Обтекание пластины

Предположим, что решение задачи об обтекании кругового цилиндра известно. Конформное преобразование внешности круга единичного радиуса во вспомогательной плоскости  $\zeta$  на внешность замкнутого профиля в плоскости течения  $z$  (в данном случае отрезка пластины  $[-a, a]$ ) осуществляется с помощью преобразования Жуковского:

$$z = \frac{a}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (\text{П.1})$$

В плоскости  $\zeta$  на окружности  $R = 1$ ,  $\zeta = e^{i\theta}$ . Поэтому из (П.1) получим

$$z = x + iy = \frac{a}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = a \cos \theta, \quad (\text{П.2})$$

где  $x = a \cos \theta$ ;  $y = 0$ , так, что полному обходу окружности ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) соответствует двойной обход отрезка  $[-a, a]$ . Из (П.1) получим обратное преобразование:

$$a\zeta^2 - 2z\zeta + a = 0, \quad (\text{П.3})$$

откуда 
$$\zeta = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - a^2}}{a}. \quad (\text{П.4})$$

Чтобы преобразование (П.4.) переводило внешность отрезка  $[-a, a]$  на внешность круга, перед корнем выбираем знак +:

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} = F(z). \quad (\text{П.5})$$

Выражение для комплексного потенциала циркуляционного обтекания кругового цилиндра в плоскости  $\zeta$  имеет вид

$$W(\zeta) = k\bar{V}_\infty\zeta + \frac{kV_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta, \quad (\text{П.6})$$

где  $k = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_\infty = \frac{a}{2}$ ;  $\bar{V}_\infty = |V_\infty|e^{-i\alpha}$ ;  $V_\infty = |V_\infty|e^{i\alpha}$ ,

а  $\Gamma$  — заданная циркуляция по замкнутому контуру.

При существовании преобразования для произвольного контура  $\zeta = F(z)$  выражение для комплексного потенциала обтекания эллипса в плоскости физических переменных  $z$  имеет вид

$$W(z) = k\bar{V}_\infty F(z) + \frac{kV_\infty R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z). \quad (\text{П.7})$$

Для частного случая обтекания пластины (отрезка  $[-a, a]$ ) выражение для соответствующего комплексного потенциала получается подстановкой выражения (П.5.) в формулу (П.6.):

$$W(z) = \frac{1}{2}\bar{V}_\infty(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{1}{2}V_\infty(z - \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}); \quad (\text{П.8})$$

Вычисляя скорость из (П.8.), можно получить

$$\bar{V} = \frac{dW}{dz} = u_\infty - \frac{iv_\infty z - \frac{\Gamma}{2\pi i}}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (\text{П.9})$$

где  $u_\infty$  и  $v_\infty$  — проекции  $V_\infty$  на оси  $x$  и  $y$ .

Из (П.9) видно, что при произвольной величине циркуляции  $\Gamma$  и  $z = \pm a$  скорость имеет бесконечные значения, что соответствует обтеканию острых передней и задней кромок. Подчиняя величину  $\Gamma$  условию конечности скорости на задней кромке ( $z=a$ ), как того требует постулат Чаплыгина–Жуковского (пластинка как модель закругленного спереди тонкого профиля с задней острой кромкой), из (П.9) получим

$$\Gamma = -2\pi a V_\infty = -2\pi a |V_\infty| \sin \alpha. \quad (\text{П.10})$$

Поэтому в соответствии с (П.8) выражение для комплексного потенциала обтекания пластины примет вид

$$W(z) = \frac{1}{2} \bar{V}_\infty (z + \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{1}{2} V_\infty (z - \sqrt{z^2 - a^2}) + ia|V_\infty| \sin \alpha \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}). \quad (\text{П.11})$$

По определению сила давления потока (сопряженная) на профиль равна

$$\bar{R} = R_x - R_y = \frac{\rho i}{2} \oint_c |V|^2 d\bar{z} = \frac{\rho i}{2} \oint_c \bar{V}^2 dz = \frac{\rho i}{2} \oint_c \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz. \quad (\text{П.12})$$

Сила, действующая на пластину:

$$\bar{R} = i\rho \bar{V}_\infty \Gamma = -2\pi\rho a |V_\infty|^2 e^{-i\alpha} \sin \alpha, \quad (\text{П.13})$$

$$R_x = -2\pi\rho |V_\infty|^2 a \sin^2 \alpha, \quad (\text{П.14})$$

$$R_y = 2\pi\rho |V_\infty|^2 a \sin \alpha \cos \alpha. \quad (\text{П.15})$$

Важно подчеркнуть, что несмотря на то, что при обтекании контура (пластины) идеальной жидкостью все элементарные напряжения нормальны к пластинке, в данном случае возникает отличная от нуля сила  $R_x$ , направленная по касательной к ней. Это связано с тем, что постулат Чаплыгина–Жуковского накладывает ограничение на величину скорости лишь у задней острой кромки. Если представить себе переднюю кромку закругленной, имеющей малый радиус кривизны, то скорости вблизи носовой части будут очень велики, а давление согласно уравнению Бернулли мало. Образующаяся разность давлений между кормовой и носовой частью профиля приводит к появлению некоторой подсосывающей силы параллельной оси  $x$ . Если радиус закругления устремить к нулю, то скорость вблизи передней кромки будет неограниченно возрастать а давление падать. Непосредственными результатами вычислений можно убедиться, что подсосывающая сила будет стремиться к некоторой предельной величине, совпадающей с  $R_x$ .

Поэтому подъемная сила, называемая силой Жуковского, имеет вид

$$P = |R| = 2\pi\rho a |V_\infty|^2 \sin \alpha, \quad (\text{П.16})$$

а коэффициент подъемной силы соответственно

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho|V_\infty|^2 S}, \quad (\text{П.17})$$

где  $S = 2a$ . Поэтому  $C_p = 2\pi \sin \alpha$ , а при малых  $\alpha$   $C_p \cong 2\pi\alpha$ .

По определению момент сил, действующих на контур:

$$L = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C \bar{V}^2 z dz = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 z dz. \quad (\text{П.18})$$

Подставляя в (П.18) выражение (П.11) для пластины, получим

$$L = -\operatorname{Re} \left( 2\pi i \rho |V_\infty|^2 \frac{a^2}{4} e^{-2i\alpha} \right) = -\frac{\pi a^2}{2} \rho |V_\infty|^2 \sin 2\alpha, \quad (\text{П.19})$$

или  $L = -\frac{a}{2} P \cos \alpha$ .

Распределение скорости на пластине можно найти из (П. 11):

$$\begin{aligned} \bar{V} = \frac{dW(z)}{dz} &= \frac{1}{2} \bar{V}_\infty \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) + \frac{1}{2} V_\infty \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) + \\ &+ 2ia |V_\infty| \sin \alpha \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} = |V_\infty| \left( \cos \alpha - i \sin \alpha \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \right), \end{aligned}$$

$$V = |V_\infty| \left( \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{\frac{a-z}{a+z}} \right),$$

$$x = a \cos \theta, \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = a \cos \theta,$$

$$V = |V_\infty| \left( \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \right).$$

Значениям  $\theta \in [0, \pi]$  соответствует верхняя сторона пластины, а  $\theta \in [0, \pi]$  — нижняя сторона пластины.

$V = |V_\infty| \cos \alpha$  — на задней кромке.

Эксперимент показывает, что результаты, полученные при рассмотрении обтекания пластины, могут быть использованы для тонких профилей при малых углах атаки.

### Обтекание эллиптического цилиндра

Рассмотрим при тех же условиях, что и в предыдущей задаче, обтекание эллиптического цилиндра с полуосями  $a$  и  $b$  [8].

Введем преобразование Жуковского в виде (П. 1).

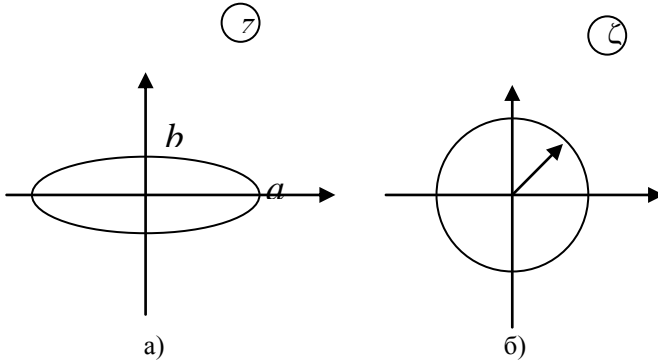


Рис. П.3. а) обтекание эллипса в плоскости  $z$ ; б) обтекание круга в плоскости  $\zeta$

Подберем постоянную  $c$  так, чтобы данное выражение преобразовывало плоскость вне круга радиуса  $R$  в область вне эллипса.

$$\text{На окружности } \zeta = R e^{i\theta} = R(\cos\theta - i \sin\theta),$$

$$x = \left( R + \frac{c^2}{R} \right) \cos\theta, \quad y = \left( R - \frac{c^2}{R} \right) \sin\theta,$$

$$a = R + \frac{c^2}{R}, \quad b = R - \frac{c^2}{R}.$$

Отображение окружности на эллипс с заданными полуосями возможно, если положить

$$R = \frac{1}{2}(a+b), \quad c = \sqrt{\frac{1}{2}(a-b)R} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2},$$

преобразование Жуковского теперь запишется в виде

$$z = \zeta + \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{\zeta},$$

$$\zeta = F(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{2}, \quad R = \frac{a+b}{2}, \quad k=1.$$

Комплексный потенциал обтекания эллиптического цилиндра:

$$W(z) = \frac{1}{2} \bar{V}_\infty \left( z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right) + \frac{1}{2} V_\infty \frac{a+b}{a-b} \left( z - \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left( z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right).$$

Момент сил, действующий на эллиптический цилиндр:

$$L = -\frac{\pi \rho}{2} (a^2 - b^2) |V_\infty|^2 \sin 2\alpha.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов А.А., Гудзовский А.В. Пакет прикладных программ Flow Vision // М.: МФТИ., сер. Аэрофизика и прикладная математика.— 1998. — С. 45–56.
2. Зибаров А.В., Бабаев Д.М., Шадский А.М. Gas Dynamics Tool 4.0. Передовые технологии для персонального компьютера. // САПР и графика. — 2000. — №10. — С. 44 – 50.
3. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. — Москва–Ижевск: R&C Dynamics, 2000. — 576 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
5. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. Механика сплошных сред. Часть 1. Основы и классические модели жидкостей. — М.: Наука, Физматлит, 2000. — 256 с.
6. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. Т. 6. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
7. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. — М.: Наука. 1982. — 335 с.
8. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть вторая. Издание третье. — М. и Л.: ОГИЗ Гос. издат. технико-теоретической литературы, 1948. — 612 с.
9. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. — М.: Мир, 1986. — 181 с.
10. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. — Л.: Изд-во. Ленингр. Ун – та, 1978. — 295 с.
11. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. I. 4-е изд. — М.: Наука, 1983. — 528 с.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
13. Харлоу Ф. Численный метод частиц в ячейках. – В кн. Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 316–342.

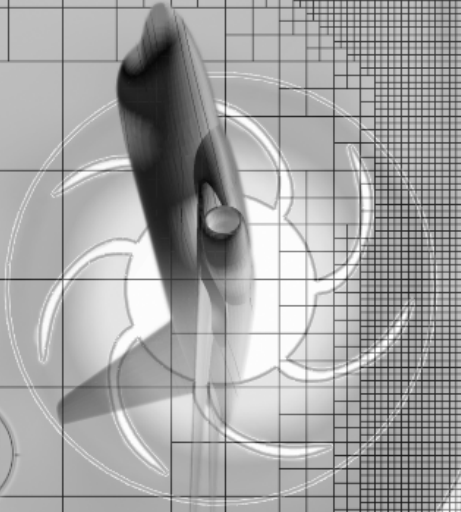
**FlowVision** - современный программный комплекс от компании ТЕСИС.

**FlowVision** моделирует трехмерные стационарные и нестационарные течения жидкости и газа.

Новейший процессор позволяет быстро и эффективно анализировать результаты расчета.



# FlowVision



**FlowVision: Flow know-how.**  
**<http://www.flowvision.ru>**



Газодинамический пакет  
**GasDynamics Tool®**

- аэрокосмическая техника;
- экология и безопасность;
- системы вооружений

## **Scientific VR®**

Визуализатор для быстрого и  
качественного анализа  
численных, аналитических и  
экспериментальных данных

**Научное  
программное  
обеспечение**

## **Контактная информация**

300034, Россия, Тула,  
ул. Демонстрации, 27-79,  
тел/факс. (0872) 20-68-77, 20-53-44,  
e-mail: [info@cfd.ru](mailto:info@cfd.ru), web: <http://www.cfd.ru>